

Теория управления II

В.А.Бондарко

8 ноября 2005 г.

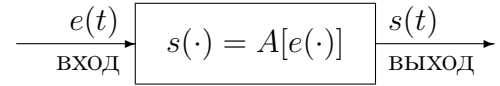
В разные годы читались разные подмножества настоящего курса, некоторые темы — только студентам кафедры теоретической кибернетики; далее предлагается самый полный вариант.

1. Понятие объекта управления. Основные цели управления. Принцип разомкнутого управления. Управление по принципу обратной связи. Задачи синтеза системы управления. Характеристики системы: устойчивость, робастность, оптимальность. Математические модели систем управления. Формальное определение системы (объекта управления). Стационарные системы. Линейные системы.
2. Функциональная модель ("вход-выход"). Каноническая модель в пространстве состояний. Переход от канонической модели к функциональной. Переход от функциональной модели к канонической.
3. Преобразование Лапласа. Передаточная функция линейной стационарной системы. Вычисление передаточной функции.
4. Управляемость и наблюдаемость конечномерных канонических систем. Теорема двойственности. Устойчивость и стабилизируемость.
5. Основная теорема о внешней устойчивости ЛСС.
6. Стабилизируемость, синтез стабилизирующей обратной связи от состояния к управлению.
7. Перемещение собственных чисел. Лемма Шура. Лемма о перестановке. Лемма Хеймана.
8. Теорема о стабилизации.
9. Стабилизируемость по выходу. Синтез обратной связи.
10. Детектируемость, теорема о детекции.
11. Построение обратной связи по выходу с помощью наблюдателя.
12. Теорема о стабилизируемости по выходу. Невырожденность передаточных функций. Стабилизация по выходу для функциональных моделей.
13. Дискретные системы. Z-преобразование. Передаточные функции.
14. Оптимальное управление дискретными минимально-фазовыми объектами с нерегулярным возмущением, с запаздыванием, с устойчивым многочленом при возмущении.
15. Дискретизация конечномерных ЛСС.
16. Наследование свойств в пространстве состояний.
17. Дискретизация функциональных ("вход-выход") моделей.
18. Наследование невырожденности.
19. Асимптотика нулей передаточной функции. Наследование минимальной фазовости.
20. Оптимальное управление непрерывными минимально-фазовыми объектами с нерегулярным возмущением, с запаздыванием и без.
21. Бесконечномерные модели. Полугруппы.
22. Стабилизируемость бесконечномерных объектов по состоянию.

23. Стабилизируемость по выходу и невырожденность передаточных функций непрерывных объектов.
24. Дискретизация бесконечномерных систем.
25. Стабилизируемость и невырожденность бесконечномерных систем.
26. Наследование невырожденности и стабилизация бесконечномерных систем.
27. Теорема о малом коэффициенте.
28. Уравновешенные реализации. Лемма Ляпунова. Грамианы.
29. Редукция компонент, соответствующих нулевым диагональным блокам грамиана управляемости и грамиана наблюдаемости.
30. Теорема об одновременном приведении. Уравновешенная реализация для минимальной реализации.
31. Кронекеровские произведение и сумма. Уравнение Сильвестра.
32. Редукция (уменьшение размерности) модели посредством усечения сбалансированной реализации.
33. "Полулинейная" теорема о малом коэффициенте. Круговой критерий.
34. Постановка задач управления для нелинейных систем.
35. Линейные системы и линеаризация. Синтез через линеаризацию. Стабилизация по выходу через линеаризацию.
36. Интегрирующая обратная связь.
37. Линеаризация "вход-состояние".
38. Обратные связи по состоянию. Интегрирующая обратная связь.
39. Линеаризация "вход-выход". Backstepping.

Понятие объекта управления.

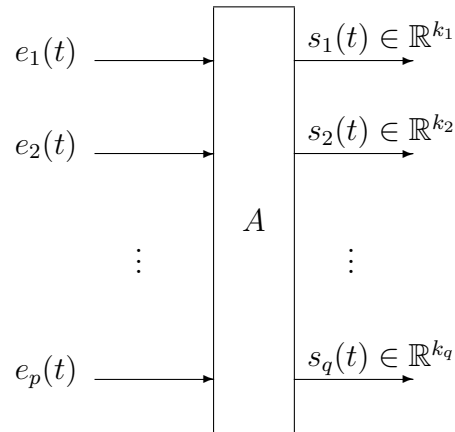
Объект управления (система):



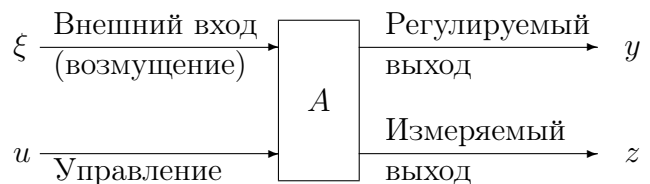
$e(\cdot), s(\cdot)$ — сигналы (входной и выходной, $e(t) \in \mathbb{R}^m, s(t) \in \mathbb{R}^k$), A — динамический оператор.

Объект управления со многими входами и выходами:

$$e = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \vdots \\ e^{m_1} \\ \hline e^{m_1+1} \\ \vdots \\ e^{m_1+m_2} \\ \hline \vdots \\ e^{m_1+\dots+m_{p-1}+1} \\ \vdots \\ e^{m_1+\dots+m_p} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} e_1 \in \mathbb{R}^{m_1} \\ e_2 \in \mathbb{R}^{m_2} \\ \vdots \\ e_p \in \mathbb{R}^{m_p} \end{array} \right\} \right\} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_p \end{bmatrix}.$$



Типичное ролевое деление входов и выходов на блоки:



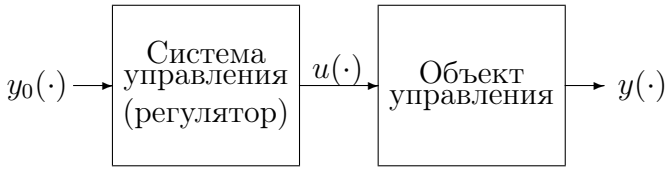
Основные цели управления:

$y(\cdot) \equiv y_0 = \text{const}$ — стабилизация, $y(\cdot) \equiv y_0(\cdot)$ — слежение.

Принцип разомкнутого управления.

Объект $y(\cdot) = \mathcal{A}[u(\cdot)]$, цель $y(\cdot) \equiv y_0(\cdot)$,
 $\mathcal{A}[u(\cdot)] = y_0(\cdot) \Rightarrow u(\cdot) = \mathcal{A}^{-1}[y_0(\cdot)]$

— программное управление:

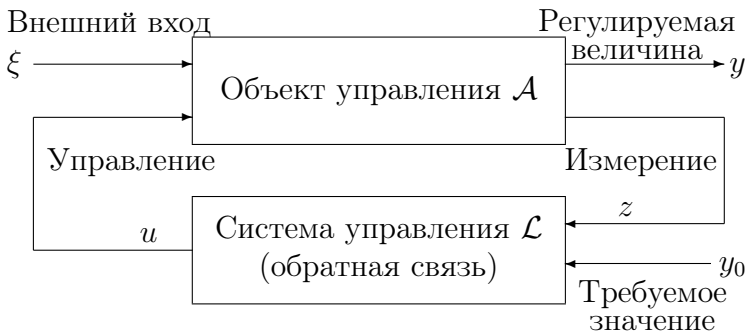


Отсутствие измерений результата подразумевает

1. Точное знание \mathcal{A} (реальный объект должен совпадать с номинальным).
2. Отсутствие внешних входов или их точное знание.

Пример — тостер. Контрпример — автомобиль.

Управление по принципу обратной связи.



Предположим, что объект управления и обратная связь линейны:

$$\left. \begin{aligned} y &= \mathcal{A}_{yu}(u) + \mathcal{A}_{y\xi}(\xi), \\ z &= \mathcal{A}_{zu}(u) + \mathcal{A}_{z\xi}(\xi), \\ u &= \mathcal{L}_{uz}z + \mathcal{L}_{uy_0}y_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рассмотрим задачу отслеживания задающего воздействия y_0 с подавлением возмущения ξ . Из

(1) следует, что

$$y = \mathcal{B}_{y\xi}(\xi) + \mathcal{B}_{yy_0}(y_0).$$

Задача будет решена, если так выбрать \mathcal{L}_{uz} и \mathcal{L}_{uy_0} , чтобы $\mathcal{B}_{y\xi} = 0$, $\mathcal{B}_{yy_0} = I$ (I — единичный оператор). Вычислим $\mathcal{B}_{y\xi}$ и \mathcal{B}_{yy_0} :

$$u = \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{zu}(u) + \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{z\xi}(\xi) + \mathcal{L}_{uy_0}(y_0) \Rightarrow$$

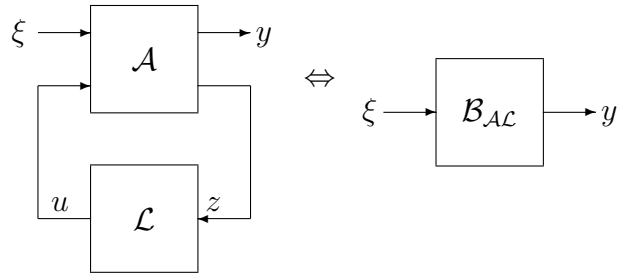
$$u = (I - \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{zu})^{-1}\mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{z\xi}(\xi) +$$

$$+ (I - \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{zu})^{-1}\mathcal{L}_{uy_0}(y_0) \Rightarrow$$

$$y = \underbrace{[\mathcal{A}_{yu}(I - \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{zu})^{-1}\mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{z\xi} + \mathcal{A}_{y\xi}]}_{\mathcal{B}_{y\xi}=0}(\xi) +$$

$$+ \underbrace{[\mathcal{A}_{yu}(I - \mathcal{L}_{uz}\mathcal{A}_{zu})^{-1}\mathcal{L}_{uy_0}]}_{\mathcal{B}_{yy_0}=I}(y_0).$$

Задачи синтеза системы управления.

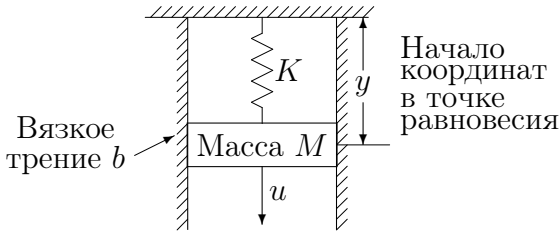


Характеристики системы.

1. Устойчивость: $\xi(\cdot) \approx 0 \Rightarrow y(\cdot) - y_0(\cdot) \approx 0$ — стабилизация, стабилизирующая система управления.
2. Робастность: $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_0\| \leq \Delta \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}$ — устойчива, где \mathcal{A}_0 — известная номинальная модель.
3. Оптимальность: $\min_{\mathcal{L} \in \mathbb{L}} \sup_{\xi \in \Xi} \|\mathcal{B}_{\mathcal{A},\mathcal{L}}(\xi) - y_0\|$, где \mathbb{L} — класс всех стабилизирующих регуляторов, Ξ — известный класс возмущений.

Математические модели систем управления.

1. Груз на пружине:



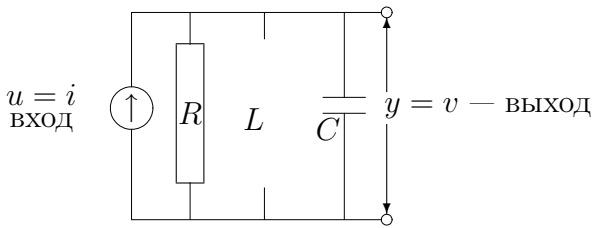
$$M\ddot{y} = u - Ky - b\dot{y} \Leftrightarrow$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + Ky = u, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

$$y(\cdot) = \mathcal{B}[u(\cdot), y_0, y_1],$$

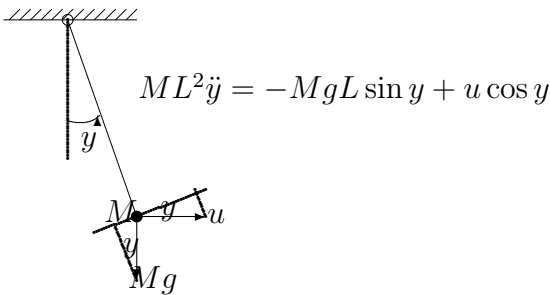
$[y(t), \dot{y}(t)]$ — состояние в момент t .

2. Электрическая цепь:



$$\frac{y}{R} + C\dot{y} + \frac{1}{L} \int_0^t y(s) ds = u.$$

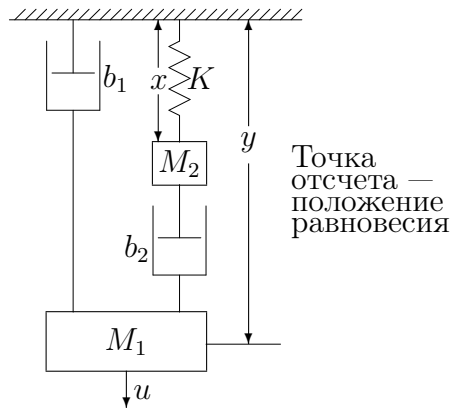
3. Маятник:



Линеаризация: $|y| < \pi/4 \Rightarrow \sin y \approx y, \cos y \approx 1 \Rightarrow$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L}y = \frac{1}{ML^2}u$$

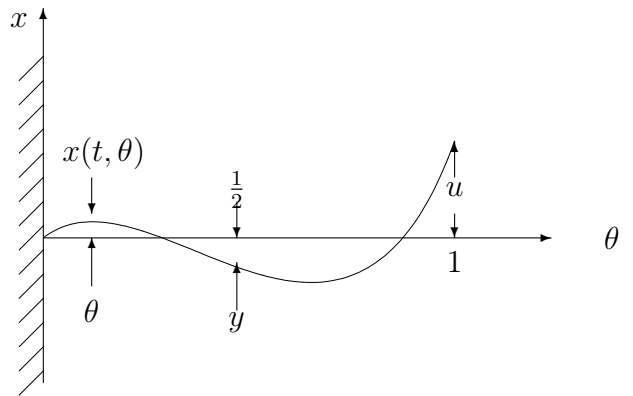
4. Два груза на пружине с трением:



$$\begin{cases} M_1\ddot{y} + (b_1 + b_2)\dot{y} - b_2\dot{x} = u, \\ M_2\ddot{x} + b_2\dot{x} + Kx - b_2\dot{y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Состояние: (x, \dot{x}, y, \dot{y})

5. Система с распределенными параметрами:



$$\begin{cases} \partial^2 x / \partial t^2 = a^2 \partial^2 x / \partial \theta^2, & \theta \in [0, 1], t \leq 0, \\ x(t, 0) = 0, x(t, 1) = u(t), & x(0, \theta) = x_0(\theta), \\ & \frac{\partial x}{\partial t}(0, \theta) = x_1(\theta) \end{cases}$$

$$y(t) = x(t, \frac{1}{2}).$$

$$\Leftrightarrow y(\cdot) = \mathcal{B}[u(\cdot), x_0(\cdot), x_1(\cdot)]$$

Состояние $[x(t, \cdot), \partial x(t, \cdot) / \partial t]$ — пара функций.

Формальное определение системы (объекта управления).



Сигнал $\sigma : [t_0, \infty) \rightarrow \Sigma, t_0[\sigma(\cdot)] := t_0$ — на-

чальный момент сигнала.

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cc} e(\cdot), & x_0 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{входной} & \text{начальное} \\ \text{сигнал} & \text{состояние} \end{array} \right] \xrightarrow{\mathcal{A}} \left[\begin{array}{cc} s(\cdot), & x(\cdot) \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{выходной} & \text{эволюция} \\ \text{сигнал} & \text{состояния} \end{array} \right] \end{array}$$

$x_0 \in X_0$ — множество состояний (обычно \mathbb{R}^n или пространство функций),

$e(\cdot) \in E$ — множество допустимых входных сигналов,

$s(\cdot) \in S$ — множество выходных сигналов,

$x(\cdot) \in X$ — множество эволюций — функций со значениями в X .

Определение. Система — это оператор $\mathcal{A} : E \times X_0 \rightarrow S \times X$ $\mathcal{A}[e(\cdot), x_0] = [s(\cdot), x(\cdot)]$, обладающий следующими свойствами:

1. *Согласование сигналов:*

$$t_0[s(\cdot)] = t_0[x(\cdot)] = t_0[e(\cdot)] =: t_0.$$

2. *Транзитивность:*

$$\mathcal{A}[e|_{[t_1, \infty)}, x(t_1)] = [s|_{[t_1, \infty)}, x|_{[t_1, \infty)}].$$

3. *Неупреждаемость:* если $\mathcal{A}[e_i(\cdot), x_i^0] = [s_i(\cdot), x_i(\cdot)]$ при $i = 1, 2$, то

$$\left. \begin{array}{l} e_1(t) = e_2(t) \forall t \in [t_0, t_1], \\ t_0[e_1] = t_0[e_2] =: t_0, \\ x_1^0 = x_2^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_1(t) = s_2(t), \\ x_1(t) = x_2(t) \\ \forall t \in [t_0, t_1]. \end{array} \right. \begin{array}{l} E \text{ — все } q \text{ раз дифференцируемые скалярные сигналы.} \\ S \text{ — все } p \text{ раз дифференцируемые скалярные сигналы.} \end{array}$$

Стационарные системы.

Сдвиг сигнала во времени:

$$e(\cdot) : [t_0, +\infty) \rightarrow \Sigma, \tau \in \mathbb{R} \mapsto e_\tau(t) := e(t + \tau), \\ t \in [t_0 - \tau, +\infty)$$

Определение. Система \mathcal{A} стационарна, если

1. $e(\cdot) \in E \Rightarrow e(\cdot) \in E \forall \tau \in \mathbb{R}$.

2. $\mathcal{A}[e_\tau(\cdot), x_0] = [s_\tau(\cdot), x_\tau(\cdot)]$, где $\mathcal{A}[e(\cdot), x_0] = [s(\cdot), x(\cdot)]$.

Если $e(\cdot)$ начинается в нуле, то $e_{-\tau}(\cdot)$ начинается в τ . Можно ограничиться сигналами, начинающимися в нуле:

$$E^0 = \{e(\cdot) \in E : t_0(e) = 0\}.$$

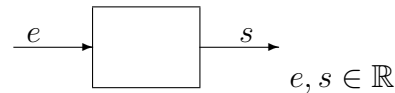
Тогда сдвинутый направо сигнал нужно как-то доопределить — например, нулем.

Определение. Стационарная система линейна, если X_0, E, X, S — линейные пространства и оператор $\mathcal{A} : E^0 \times X_0 \rightarrow S^0 \times X^0$ линеен.

Бывают вещественные и комплексные системы.

Распространенные типы линейных стационарных систем.

1. Функциональная модель ("вход-выход"). Скалярный случай.



$$\begin{aligned} a_0 s^{(p)} + a_1 s^{(p-1)} + \dots + a_p s &= \\ &= b_0 e^{(q)} + b_1 e^{(p-1)} + \dots + b_q e, \\ a_i \in \mathbb{R} \ni b_j, a_0 \neq 0 \neq b_0, \\ s(0) = s_0, \dots, s^{(p-1)}(0) = s_{p-1}. \end{aligned}$$

$$x_0 = (s_0, s_1, \dots, s_{p-1}) \in \mathbb{R}^p = X_0.$$

$$X = \{x(\cdot) = [s_0(\cdot), \dots, s_{p-1}(\cdot)]\},$$

$s_0(\cdot)$ — p раз дифференцируемая функция,

$s_1(\cdot)$ — $p - 1$ раз,

...

$s_0(\cdot)$ — дифференцируемая функция,

$$x(t) = [s(t), \dot{s}(t), \dots, s^{(p-1)}(t)].$$

Система стационарна и линейна.

Сокращенная запись:

$$a(\lambda) = a_0\lambda^p + \dots + a_p, \quad b(\lambda) = b_0\lambda^q + \dots + b_q,$$

$$a(d/dt) := a_0 \frac{d^p}{dt^p} + \dots + a_p,$$

$$\boxed{a(d/dt)s = b(d/dt)e} \text{ — примеры 1–3.}$$

2. Функциональная ("вход-выход") модель. Векторный случай.

$$\begin{aligned} a_0 s^{(p)} + a_1 s^{(p-1)} + \dots + a_p s &= \\ &= b_0 e^{(q)} + b_1 e^{(p-1)} + \dots + b_q e, \\ a_i &\in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ (} k \times k \text{ — матрицы)}, \quad b_j \in \mathbb{R}^{k \times m}, \\ \det a_0 &\neq 0, \\ s(0) &= s_0, \dots, s^{(p-1)}(0) = s_{p-1}. \end{aligned}$$

Матричные многочлены можно рассматривать как матрицу из многочленов или как многочлен с матричными коэффициентами. Покомпонентная запись:

$$\begin{aligned} a_{11}(d/dt)s_1 + a_{22}(d/dt)s_2 + \dots + a_{1k}(d/dt)s_k &= \\ &= b_{11}(d/dt)e_1 + \dots + b_{1m}(d/dt)e_m, \\ &\vdots \\ a_{11}(d/dt)s_1 + a_{22}(d/dt)s_2 + \dots + a_{1k}(d/dt)s_k &= \\ &= b_{11}(d/dt)e_1 + \dots + b_{1m}(d/dt)e_m, \end{aligned}$$

$a_{ij}(\lambda)$ — многочлены степени $\leq p$, $b_{ij}(\lambda)$ — многочлены степени $\leq q$.

3. Функциональная ("вход-выход") модель с запаздыванием. Для простоты — скалярный случай.

$$\begin{aligned} a(d/dt)s(t) + \bar{a}(d/dt)s(t - \tau) &= \\ &= \underbrace{b(d/dt)e(t) + \bar{b}(d/dt)e(t - \tau)}_{f(t)}, \quad \tau > 0. \end{aligned}$$

$s(t) = s_0(t) \forall t \in [-\tau, 0]$, $s_0(\cdot)$ — заданная функция.

Метод приспособывания:

$$\begin{aligned} &\text{известно} \\ &\underbrace{a(d/dt)s(t) = f(t) - \bar{a}(d/dt)s(t - \tau)} \\ &\begin{array}{c} \text{Начальные} \\ \text{данные} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} s(0+0) = s_0(0-0), \\ \dot{s}(0+0) = \dot{s}_0(0-0), \\ \dots \\ s^{(p-1)}(0+0) = s_0^{(p-1)}(0-0), \end{array} \right. \end{aligned}$$

Начальное состояние — пара функций $s_0(\cdot) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ и $e_0(\cdot) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$. Состояние в момент t — пара функций $(s_0(\cdot)|_{[t-\tau, t]}, e_0(\cdot)|_{[t-\tau, t]})$.

4. Каноническая модель в пространстве состояний

$$\begin{array}{c} e(\cdot) \rightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}^n} \rightarrow y(\cdot) \\ \text{состояние} \\ e(t) \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) \in \mathbb{R}^k. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Be, \\ y &= Cx + De, \end{aligned}$$

где A, B, C, D — матрицы соответствующих размерностей.

$$[e(\cdot), x_0 \in \mathbb{R}^n] \xrightarrow[x(0)=x_0]{\dot{x}=Ax+Be} x(\cdot) \xrightarrow[y=Cx+De]{y=Cx+De} y(\cdot)$$

На самом деле, все функциональные модели неявно подразумевают модель в пространстве состояний — иначе негде было бы взять существование и единственность решения.

Приведение примера 4 к канонической форме: u — вход, y — выход,

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y} + (b_1 + b_2) \dot{y} - b_2 \dot{x} = u \\ M_2 \ddot{x} + b_2 \dot{x} + Kx - b_2 \dot{y} = 0. \end{cases}$$

$$x = (z_1, z_2, z_3, z_4) \sim (y, \dot{y}, x, \dot{x}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -\frac{b_1+b_2}{M_1} z_2 + \frac{b_2}{M_1} z_4 + \frac{u}{M_1}, \\ \dot{z}_3 = z_4, \\ \dot{z}_4 = -\frac{b_2}{M_2} z_4 - \frac{K}{M_2} z_3 + \frac{b_2}{M_2} z_2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\dot{z} = Az + Bu, \quad y = Cz + Du,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1+b_2}{M_1} & 0 & 0 & \frac{b_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_2}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & -\frac{b_2}{M_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (1, 0, 0, 0), \quad D = 0.$$

Приведение примера 4 к функциональной модели

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y} + (b_1 + b_2) \dot{y} - b_2 \dot{x} = u \\ M_2 \ddot{x} + b_2 \dot{x} + Kx - b_2 \dot{y} = 0. \end{cases}$$

u — вход, y — выход. Продифференцируем первое уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{M_1}{b_2} \ddot{y} + \frac{b_1 + b_2}{b_2} \dot{y} - \frac{u}{b_2} \Rightarrow \\ \ddot{x} &= \frac{M_1}{b_2} \ddot{\dot{y}} + \frac{b_1 + b_2}{b_2} \ddot{y} - \frac{\dot{u}}{b_2} \end{aligned}$$

и подставим полученные выражения во второе:

$$\begin{aligned} \frac{M_1 M_2}{b_2} \ddot{\dot{y}} + \boxed{\frac{M_2 (b_1 + b_2)}{b_2} \ddot{y}} - \frac{M_2}{b_2} \dot{u} + \\ + \boxed{M_1 \ddot{y}} + \boxed{(b_1 + b_2) \dot{y}} - u + Kx - \boxed{b_2 \dot{y}} = 0 \Rightarrow \\ \frac{M_1 M_2}{b_2} y^{(4)} + (M_2 \frac{b_1 + b_2}{b_2} + M_1) y^{(3)} + \\ + b_1 y^{(2)} + K \dot{x} = \frac{M_2}{b_2} u^{(2)} + \dot{u}, \\ \underbrace{\frac{M_1}{b_2} \ddot{y} + \frac{b_1 + b_2}{b_2} \dot{y} - \frac{u}{b_2}} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{M_1 M_2}{b_2} y^{(4)} + (M_2 \frac{b_1 + b_2}{b_2} + M_1) y^{(3)} + (b_1 + K \frac{M_1}{b_2}) y^{(2)} + \\ + K \frac{b_1 + b_2}{b_2} \dot{y} = \frac{M_2}{b_2} u^{(2)} + \dot{u} + \frac{u}{b_2}. \end{aligned}$$

Начальные данные:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} y(0) = y_0, \\ \dot{y}(0) = y_1, \\ y^{(2)}(0) = -\frac{b_1+b_2}{M_1} y_1 + \frac{b_2}{M_1} x_1 + \frac{u(0)}{M_1}, \\ y^{(3)}(0) = \varphi[u(0), \dot{u}(0), y_1, x_1] - \frac{b_2 K}{M_1 M_2} x_0, \end{cases}$$

где $\varphi(\cdot)$ — линейная функция, значения $u(0), \dot{u}(0)$ заданы.

Переход от канонической модели к функциональной.

Пусть задана каноническая модель

$$\dot{x} = Ax + Be,$$

$$s = Cx + De, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad e(t) \in \mathbb{R}^m, \quad s(t) \in \mathbb{R}^k.$$

Требуется отыскать такие матричные многочлены $a(\lambda), b(\lambda)$, что

$$\boxed{a(d/dt)s = b(d/dt)e.}$$

Обозначим $\alpha(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$, т.е. $\alpha_0 = 1$.

Теорема. Существует такой $k \times m$ -матричный многочлен $b(\lambda)$, что

$$\alpha(d/dt)s = b(d/dt)e$$

для любого n раз дифференцируемого сигнала $e(\cdot)$.

Доказательство. Используем тождество Кэли:

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n I = 0$$

Для произвольного многочлена

$$f(\lambda) = f_0 \lambda^p + f_1 \lambda^{p-1} + \dots + f_p$$

определим

$$f_{(1)}(\lambda) = [f(\lambda) - f(0)]/\lambda = f_0 \lambda^{p-1} + f_1 \lambda^{p-2} + \dots + f_{p-1},$$

$$f_{(d)}(\lambda) = (f_{(d-1)}(\lambda))_{(1)}, \quad d = 2, 3, \dots, p,$$

$$f_{(p)}(\lambda) = 1.$$

Продифференцировав n раз каноническое уравнение, умножим строки на коэффициенты $\alpha(\lambda)$ и сложим:

$$\alpha_n \times \quad x = x,$$

$$\alpha_{n-1} \times \quad \dot{x} = Ax + Be,$$

$$\alpha_{n-2} \times \quad \ddot{x} = A\dot{x} + B\dot{e} =$$

$$= A^2 x + AB e + B \dot{e},$$

$$\alpha_{n-3} \times \quad \ddot{\ddot{x}} = A\ddot{x} + B\ddot{e} =$$

$$= A^3 x + A^2 B e + AB \dot{e} + B \ddot{e},$$

\vdots

$$\alpha_0 \times \quad x^{(n)} = A^n x + A^{n-1} B e + A^{n-2} B \dot{e} + \dots + B e^{(n-1)},$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad \sum \quad \Rightarrow$$

$$\alpha(d/dt)x = \underbrace{\alpha(A)}_0 x + \alpha_{(1)}(A)Be + \alpha_{(2)}(A)B\dot{e} + \dots + \alpha_{(n)}(A)Be^{(n-1)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha(d/dt)y &= \alpha(d/dt)[Cx + De] = \\ &= C\alpha(d/dt)x + D\alpha(d/dt)e = \\ &= [C\alpha_{(1)}(A)B + \alpha_n D]e + [C\alpha_{(2)}(A)B + \alpha_{n-1}D]\dot{e} + \\ &+ \dots + [C\alpha_{(n)}(A)B + \alpha_1 D]e^{(n-1)} + De^{(n)}. \end{aligned}$$

Следствие: $\deg \alpha = \deg b \Leftrightarrow D \neq 0$.

Эквивалентность? Скалярный случай:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = C \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{rank} = n} x_0 + \begin{matrix} \Xi \\ \text{не} \\ \text{важно} \end{matrix} \begin{bmatrix} e(0) \\ \dot{e}(0) \\ \vdots \\ e^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}$$

Векторный случай?

Переход от функциональной модели к канонической

Ограничимся скалярным случаем.

$$a(d/dt)s = b(d/dt)e, \quad \deg a \geq \deg b,$$

$$a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_n, \quad b(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_n.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} = Ax + Be, \\ s = Cx + De. \end{bmatrix} \quad ? \quad A, B, C, D \text{ не зависят от } e, s$$

Обозначим $C = [1, 0, \dots, 0], D = b_0$,

$$\begin{aligned} x_0 &= s - b_0e, \\ x_1 &= \dot{s} - b_0\dot{e} + a_1s - b_1e, \\ x_2 &= \ddot{s} - b_0\ddot{e} + a_1\dot{s} - b_1\dot{e} + a_2s - b_2e, \\ &\vdots \end{aligned} \quad x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$x_{n-1} = s^{(n-1)} - b_0e^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}s - b_{n-1}e,$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 - a_1b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_nb_0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & & \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & & & & 1 \\ -a_n & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$s = x_0 + b_0e = \boxed{Cx + De},$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \dot{s} - b_0\dot{e} = x_1 - a_1s + b_1e = \\ &= x_1 - a_1x_0 + (b_1 - a_1b_0)e, \\ \dot{x}_1 &= \ddot{s} - b_0\ddot{e} + a_1\dot{s} - b_1\dot{e} = \\ &= x_2 - a_2s + b_2e = x_2 - a_2x_0 + (b_2 - a_2b_0)e, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} - a_{n-1}x_0 + (b_{n-1} - a_{n-1}b_0)e, \\ \dot{x}_{n-1} &= (s^{(n)} + a_1s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{s}) - \\ &\quad - (b_0e^{(n)} + \dots + b_{n-1}\dot{e}) = -a_ns + b_ne = \\ &= -a_nx_0 + (b_n - a_nb_0)e, \end{aligned}$$

то есть $\boxed{\dot{x} = Ax + Be}$, что и требовалось.

Преобразование Лапласа.

Функция $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^k$ допускает преобразование Лапласа, если

$$\exists \rho \in \mathbb{R} : e^{-\rho t} z(t) \in L_1,$$

$$\tilde{z}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda t} z(t) dt, \quad \lambda \in H_\rho = \{\lambda : \text{Re} \lambda > \rho\},$$

$$\tilde{z}(\cdot) = Z(\cdot) = \mathcal{L}[z(\cdot)] \Leftrightarrow \tilde{z}(\cdot) \doteq Z(\cdot) \Leftrightarrow \tilde{Z}(\cdot) \doteq z(\cdot).$$

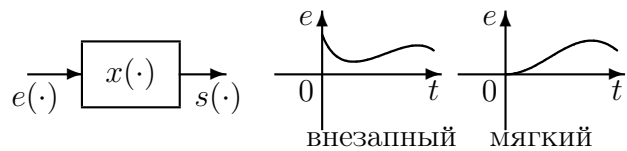
Аналитическое продолжение: $e^{\rho t} \doteq 1/(\lambda - \rho)$.

Единственность: $\mathcal{L}[z_1(\cdot)] = \mathcal{L}[z_2(\cdot)] \Leftrightarrow z_1(\cdot) = z_2(\cdot)$.

Обратное преобразование:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} Z(\lambda) d\lambda, \quad \sigma > \rho.$$

Внезапные и мягкие входные сигналы.



E — множество входных сигналов,

$$e_\tau^0(t) = \begin{cases} e(t - \tau), & \text{если } t \geq \tau \\ 0, & \text{если } t \in (0, \tau). \end{cases}$$

Сигнал $e(\cdot)$ — мягкий $\Leftrightarrow e_\tau^0(\cdot) \in E \forall \tau < 0$.

Свойства преобразования Лапласа: линейность,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &\doteq \lambda Z(\lambda) \text{ (для мягких)}, \\ z(t - \tau) &\doteq e^{-\tau\lambda} Z(\lambda), \\ e^{\alpha t} z(t) &\doteq Z(\lambda - \alpha), \\ z_1 * z_2 &\doteq Z_1 Z_2, \end{aligned}$$

и прочее.

Передаточная функция линейной стационарной системы.

Теорема (очень ~!) о мультипликаторе. Если линейная стационарная система имеет достаточно богатое множество входных сигналов и ее динамический оператор \mathcal{A} непрерывен, то для любого мягкого входного сигнала e , допускающего преобразование Лапласа, справедливо равенство

$$\tilde{s}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{e}(\lambda).$$

Здесь $\tilde{s}(\cdot) = \mathcal{A}[e(\cdot), 0]$, a ($\dim s \times \dim e$) – матрица $\Phi(\lambda)$ аналитична в некоторой полуплоскости H_ρ и не зависит от e .

Определение. Функция $\Phi(\lambda)$ (и любое ее аналитическое продолжение) называется передаточной функцией системы.

Если в случае векторных входа и выхода передаточная матрица разбита на прямоугольные блоки $\Phi_{ij}(\lambda)$, то они служат передаточными функциями от j -го входа к i -тому выходу.

Вычисление передаточной функции.

Общее правило: заменить в уравнении системы производную по времени на переменную Лапласа λ и решить уравнение относительно выхода.

1. Функциональная модель:

$$a(d/dt)s = b(d/dt)e \Rightarrow \tilde{s} = a^{-1}(\lambda)b(\lambda)\tilde{e} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(\lambda) = a^{-1}(\lambda)b(\lambda)}$$

2. Каноническая модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Be, \\ s = Cx + De \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{e}, \\ \tilde{s} = C\tilde{x} + D\tilde{e} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = (\lambda I - A)^{-1}B\tilde{e}, \\ \tilde{s} = [C(\lambda I - A)^{-1}B + D]\tilde{e} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D}$$

Следствие: Любая дробно-рациональная матричная функция является передаточной для некоторой функциональной модели; любая правильная дробно-рациональная матричная функция является передаточной для некоторой канонической модели.

Пример 4.

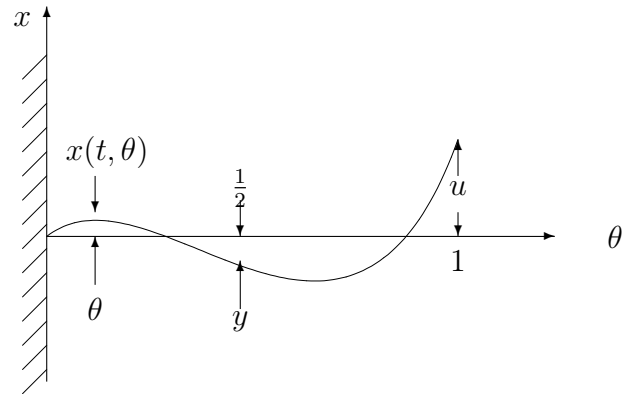
$$\begin{cases} M_1\ddot{y} + (b_1 + b_2)\dot{y} - b_2\dot{x} = u \\ M_2\ddot{x} + b_2\dot{x} + Kx - b_2\dot{y} = 0, \end{cases} \\ x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad \boxed{\Phi_{yu} = ?}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} [M_1\lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda]\tilde{y}(\lambda) - \\ - b_2\lambda\tilde{x}(\lambda) = \tilde{u}(\lambda), \end{aligned} \right| \times (M_2\lambda^2 + b_2\lambda + K) \\ & \left. \begin{aligned} [M_2\lambda^2 + b_2\lambda + K]\tilde{x}(\lambda) - \\ - b_2\lambda\tilde{y}(\lambda) = 0 \end{aligned} \right| \times \lambda b_2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{M_1M_2\lambda^4 + [M_2(b_1 + b_2) + M_1b_2]\lambda^3 + \\ & + [(b_1 + b_2)b_2 + M_1K - b_2^2]\lambda^2 + (b_1 + b_2)K\lambda\}\tilde{y} = \\ & = [M_2\lambda^2 + b_2\lambda + K]\tilde{u} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_{yu}(\lambda) = [\dots]/\{\dots\}}$$

Пример 5 (система с распределенными параметрами):



$$\begin{cases} \partial^2 x / \partial t^2 = \partial^2 x / \partial \theta^2, & \theta \in [0, 1], t \leq 0, \\ x(t, 0) = 0, \quad x(t, 1) = u(t), & x(0, \theta) = 0, \\ y(t) = x(t, \frac{1}{2}). & \frac{\partial x}{\partial t}(0, \theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda^2 \tilde{x}(\lambda, \theta) &= \partial^2 \tilde{x}(\lambda, \theta) / \partial \theta^2, \\ \tilde{x}(\lambda, 0) &= 0, \quad \tilde{x}(\lambda, 1) = \tilde{u}(\lambda). \end{aligned}$$

Решаем дифференциальное уравнение $\tilde{x}'' = \lambda^2 \tilde{x}$:

$$\tilde{x}(\lambda, \theta) = c_1(\lambda)e^{\lambda\theta} + c_2(\lambda)e^{-\lambda\theta} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1(\lambda) + c_2(\lambda) = 0, \\ c_1e^\theta + c_2e^{-\theta} = \tilde{u}(\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow c_1(\lambda) = -c_2(\lambda) = \frac{\tilde{u}(\lambda)}{e^\lambda - e^{-\lambda}} \quad \dot{x} = Ax + Be, \quad s = Cx, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(\lambda, \theta) = \frac{e^{\lambda\theta} - e^{-\lambda\theta}}{e^\lambda - e^{-\lambda}} \tilde{u}(\lambda) \Rightarrow \Phi(\lambda) = \frac{2}{\operatorname{ch}(\lambda/2)}.$$

Особенности:

$$\operatorname{ch}(\lambda/2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = (2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Управляемость и наблюдаемость конечномерных канонических систем.

Система управляема, если $\forall x_{0,1} \in \mathbb{C}^n, \forall T > 0$ найдется такой вход $u_{0 \rightarrow 1}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}^m$, который за время T переводит систему из x_0 в x_1 , то есть из равенств $x(0) = x_0, u(t) = u_{0 \rightarrow 1}(t)$ следует, что $x(T) = x_1$.

Теорема о критериях управляемости.
Следующие условия эквивалентны управляемости:

(I_y) Матрица $R = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ имеет максимальный ранг.

(II_y) Равенство $z^*e^{\lambda A}B = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$, где $z \in \mathbb{C}^n$, а $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — какое-нибудь множество, включающее свою предельную точку, возможно только при $z = 0$.

(III_y) Равенство $z^*(\lambda I - A)^{-1}B = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda'$, где $z \in \mathbb{C}^n$, а $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — какое-нибудь множество, включающее свою предельную точку и не включающее ни одного собственного числа A , возможно только при $z = 0$.

(IV_y) Для любых $t_1 < t_2$ эрмитова матрица

$$K = \int_{t_1}^{t_2} e^{tA} B B^* e^{tA^*} dt$$

является положительно определенной.

(V_y) Равенства $A^*z = \lambda_0 z, B^*z = 0$ возможны только при $z = 0$.

(VI_y) Для любого комплексного λ ранг матрицы $(A - \lambda I, B)$ равен n .

(VII_y) Не существует такой неособой матрицы S , что

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}, B_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times m}$,

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \quad \tilde{B} = S^{-1}B.$$

(VIII_y) Максимальный ранг имеет матрица $Q = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)$, где q_i — коэффициенты многочлена $\det(\lambda I - A) \cdot C(\lambda I - A)^{-1}B$.

Доказательство. Докажем цепочку импликаций между отрицаниями

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{IV}_y & \Rightarrow & \overline{I}_y & \xrightarrow{\text{зря}} & \overline{III}_y & \Rightarrow & \overline{II}_y \\ \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\ \overline{\text{упр-ть}} & \Leftarrow & \overline{VII}_y & \xrightarrow{\text{зря}} & \overline{V}_y & \Leftarrow & \overline{\text{упр-ть}} \end{array}$$

а остальное рассмотрим отдельно.

$$\boxed{\overline{II}_y \Rightarrow \overline{\text{упр-ть}}}$$

$$\begin{aligned} \overline{II}_y \Rightarrow \exists z \neq 0, \{\lambda_k\}, \Lambda \ni \lambda_k \rightarrow \lambda_* \in \Lambda, \lambda_k \neq \lambda_* : \\ \varphi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} z^* e^{\lambda A} B = 0 \ \forall \lambda = \lambda_k \Rightarrow \underline{\varphi(\lambda) \equiv 0} \end{aligned}$$

Предположим, что имеет место управляемость, тогда $\exists u(\cdot) : x(0) = 0, x(1) = z$, откуда

$$z * z = z^* \int_0^1 e^{sA} B u(t-s) ds = \int_0^1 \varphi(s) u(t-s) ds = 0$$

— противоречие, т.о. управляемости нет.

$$\boxed{\overline{III}_y \Rightarrow \overline{II}_y} : z^*(\lambda I - A)^{-1}B \doteq \varphi(t)$$

$$\boxed{\overline{I}_y \Rightarrow \overline{III}_y} : (\lambda I - A)^{-1}B = \lambda^{-1} \sum \lambda^{-k} A^k B$$

при д.б. $|\lambda|$. Матрица A^k при $k \geq n$ выражается через $I = A^0, A^1, \dots, A^{n-1}$ из тождества Кэли. Поэтому

$$z^*(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = 0 \Rightarrow z^*(\lambda I - A)^{-1}B = 0$$

вне некоторого круга.

$$\boxed{\overline{IV}_y \Rightarrow \overline{I}_y} : \exists z \neq 0 : z^* K z = 0 \Rightarrow z^* e^{tA} B \equiv 0.$$

Взяв в нуле производные, получаем $z^* A^k B = 0$.

$$\boxed{\overline{\text{упр-ть}} \Rightarrow \overline{IV}_y} \Leftrightarrow \boxed{IV_y \Rightarrow \text{упр-ть}} :$$

Достаточно перевести из $x_0 = 0$ в произвольную точку x_1 за время T . Достигается при $e(t) = B^* e^{(T-t)A} K^{-1} x_1$.

$$\boxed{V_y \Leftrightarrow VI_y}, \boxed{\overline{VII}_y \Rightarrow \overline{\text{упр-ть}}} \text{ — очевидно}$$

$$\begin{aligned} \boxed{VIII_y \Leftrightarrow I_y} : q_1 = B, \ q_2 = AB + a_1 B, \\ q_3 = A^2 B + a_1 AB + a_2 B, \dots, \\ q_n = A^{n-1} B + a_1 A^{n-2} B + \dots + a_{n-1} B. \end{aligned}$$

Т.о., матрицы R и Q связаны элементарными операциями над их столбцами, что не меняет определителя.

$\boxed{\overline{\text{упр-ть}} \Rightarrow \overline{VII}_y}$: представим \mathbb{C}^n в виде прямой суммы $\mathbb{R}' \oplus \mathbb{R}''$, где \mathbb{R}' натянуто на столбцы $R = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$, а \mathbb{R}'' — дополнение к \mathbb{R}' . Рассмотрим $S = (S_1, S_2)$, где $S_1 = (s_1, s_2, \dots, s_{n_1})$, $S_2 = (s_{n_1+1}, s_{n_1+2}, \dots, s_n)$, $\{s_i\}_1^{n_1}$ — базис в \mathbb{R}' , $\{s_i\}_{n_1+1}^n$ — базис в \mathbb{R}'' . По тождеству Кэли \mathbb{R}' инвариантно относительно A , поэтому

$$AS_1 = S_1 A_{11}, \text{ где } A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}.$$

Все столбцы B лежат в \mathbb{R}' , поэтому $B = S_1 B_1$, где $B_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times m}$. Все столбцы матрицы AS_2 разложимы в базисе $\{s_i\}_1^n$, то есть

$$AS_2 = S_1 A_{12} + S_2 A_{22}, \text{ где } A_{12} \in \mathbb{C}^{n_1 \times m}, A_{22} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Поскольку столбцы матрицы S образуют базис, она неособая, и

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = S^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\overline{VII}_y \Rightarrow \overline{V}_y}$: возьмем такой $z_2 \neq 0$, что $A_{22}^* z_2 = \lambda_0 z_2$. Положим $Z = \begin{bmatrix} 0 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $z = (S^{-1})^* Z$, тогда

$$\begin{aligned} A^* z &= (S \tilde{A} S^{-1})^* z = (S^{-1})^* \tilde{A}^* S^* z = \\ &= (S^{-1})^* \tilde{A}^* Z = (S^{-1})^* \lambda_0 Z = \lambda_0 z, \\ B^* z &= B^* (S^{-1})^* Z = (S^{-1}B)^* Z = \tilde{B}^* Z = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие 1. Если пара $\{A, B\}$ управляема, то пара $\{A + Bs^*, B\}$ также управляема для любой $n \times m$ -матрицы s .

Дефект квадратной матрицы — разность между ее порядком и рангом, поэтому дефект $A - \lambda_0 I$

— это количество жордановых ящичков, соответствующих собственному числу λ_0 .

Следствие 2. Для любого собственного числа λ_0 матрицы A из управляемой пары $\{A, B\}$ дефект $A - \lambda_0 I$ не превосходит ранга B .

Пусть $\{e_1(\cdot), x_1(\cdot), s_1(\cdot)\}$ и $\{e_2(\cdot), x_2(\cdot), s_2(\cdot)\}$ — пара процессов канонической системы, заданных на одном и том же промежутке $[t_1, t_2]$.

Определение. Каноническая система (пара матриц $\{A, C\}$) наблюдаема, если

$$\left. \begin{aligned} e_1(t) &\equiv e_2(t) \\ s_1(t) &\equiv s_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1(t) \equiv x_2(t).$$

Теорема двойственности. Пара $\{A, C\}$ наблюдаема \Leftrightarrow пара $\{A^*, C^*\}$ управляема.

Доказательство. По линейности достаточно рассмотреть случай $e_{1,2}(e) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0, s_{1,2}(t) \equiv 0$. В этом случае получаем, что

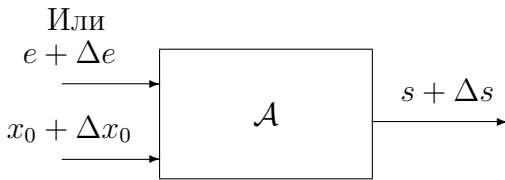
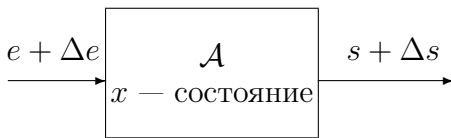
$$0 \equiv s_1(t) = e^{(t-t_1)A} x_1(t_1), \quad C x_1(t) = C e^{(t-t_1)A} x_1(t_1).$$

Сравнивая с II_y , завершаем доказательство.

Следствие: признаки наблюдаемости $I_H - VII_H$.

Устойчивость и стабилизируемость.

Система называется *устойчивой*, если любое малое возмущение **входа** (или — **входа и начального состояния**) вызывает пропорционально малое возмущение выхода.



Первый вариант привлекателен тем, что позволяет обойтись без состояния:

Пусть

$$|z(\cdot)|_2 = \left[\int_{T(z)}^{\infty} |z(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

для измеримого сигнала $z(\cdot)$.

Система устойчива (по выходу s), если существуют такие $C > 0, \delta > 0$, что

$$T(\Delta e) = T(e), |\Delta e|_2 \leq \delta \Rightarrow |\Delta s| \leq C |\Delta e|_2,$$

(то есть $|\mathcal{A}(e + \Delta e, x) - \mathcal{A}(e, x)|_2 \leq C |\Delta e|_2$) для любого входа $e \in E$ и начального состояния X .

Теорема. ЛСС устойчива \Leftrightarrow

$$\exists C : |\mathcal{A}(e, 0)|_2 \leq C |e|_2 \quad \forall e \in \overset{0}{E} \cap L_2.$$

Доказательство.

1. Пусть ЛСС устойчива, $0 \neq e \in \overset{0}{E} \cap L_2$, возьмем $\Delta e = (\delta/|e|_2)e$, тогда $|\Delta e|_2 = \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} C |\Delta e|_2 &= C \delta \geq |\mathcal{A}(0 + \Delta e, 0) - \underbrace{\mathcal{A}(0, 0)}_{=0}|_2 = \\ &= |\mathcal{A}(\Delta e, 0)|_2 = \frac{\delta}{|e|_2} |\mathcal{A}(e, 0)|_2. \end{aligned}$$

Т.о., $|\mathcal{A}(e, 0)|_2 \leq C |\Delta e|_2$, что и требуется.

2. Пусть верно неравенство, $e \in \overset{0}{E}, \Delta e \in \overset{0}{E} \cap L_2$, тогда

$$|\mathcal{A}(e + \Delta e, x) - \mathcal{A}(e, x)|_2 = |\mathcal{A}(\Delta e, 0)| \leq C |\Delta e|_2,$$

что и требуется.

Теорема (основная теорема об устойчивости ЛСС). Пусть множество мягких входных сигналов из L_2 плотно в L_2 . ЛСС устойчива в том и только в том случае, когда ее передаточная функция допускает аналитическое продолжение в открытую правую полуплоскость $\{\text{Re} \lambda > 0\}$ и это продолжение ограничено:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\text{Re} \lambda > 0} \|\Phi(\lambda)\| < \infty.$$

Следствие. Если передаточная функция $\Phi(\lambda)$ дробно-рациональна, то устойчивость \Leftrightarrow

1. $\Phi(\lambda)$ — правильная дробь.
2. Нет полюсов в $\{\lambda : \text{Re} \lambda \geq 0\}$

Пример.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e, \quad s = [1 \ 0]x.$$

$$\Phi(\lambda) : \lambda x_1 = x_2 + e, \quad \lambda x_2 = x_1 - e \Rightarrow$$

$$\lambda(\lambda x_1 - e) = x_1 - e \Rightarrow (\lambda^2 - 1)x_1 = (\lambda - 1)e$$

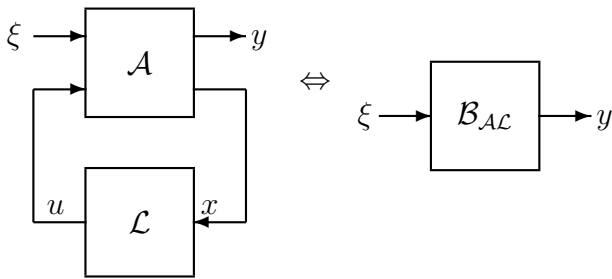
$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\lambda) = 1/(\lambda + 1)} \text{ — устойчивость!}$$

С другой стороны,

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & e^t \\ e^t & 1 \end{bmatrix},$$

т.е. даже при $e(t) \equiv 0$ значения $|x(t)|, |s(t)|$ могут экспоненциально расти! Причина — в выбранном варианте определения устойчивости. Чтобы избежать подобных казусов, придется выбрать второй вариант. Соответственно, придется следить за состоянием.

Стабилизируемость, синтез стабилизирующей обратной связи от состояния к управлению.



Определение. Система называется *стабилизируемой*, если для любых начального состояния x_0 и возмущения $\xi(\cdot)$ существует такое управление $u(\cdot) = \mathcal{L}[z_0, x(\cdot)]$, что замкнутая система устойчива.

Ищем такой динамический оператор \mathcal{L} (регулятор, обратная связь), чтобы замкнутая система была устойчивой (вариант — по выходу). Для линейных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi$$

обратную связь можно найти в виде $u = Lx$, или же ее вообще не существует.

Теорема. Система $\dot{x} = Ax + \xi$ устойчива \Leftrightarrow матрица A гурвицева.

Доказательство — через жорданову форму.

Теорема о стабилизации. Каноническая линейная стационарная система стабилизируема \Leftrightarrow

$$(L_s) \exists L \in \mathbb{C}^{m \times n} : A + BL \text{ — гурвицева матрица.} \\ \Leftrightarrow$$

(VII_c) Не существует такой неособой матрицы S , что

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times m}$, $\tilde{A} = S^{-1}AS$, $\tilde{B} = S^{-1}B$, $\{A_{22}, B_2\}$ — неуправляемая пара и весь спектр матрицы A_{22} лежит в множестве $\text{Re} \lambda \geq 0$.

Обозначим через $\sigma(P)$ спектр P .

Теорема о перемещении собственных чисел. Полная управляемость пары $\{A, B\} \Leftrightarrow$

$$\forall \sigma_0 = \{\lambda_i\}_1^n \exists L \in \mathbb{C}^{m \times n} : \sigma(A + BL) = \sigma_0.$$

Лемма Шура. Пусть A, B, C, D — матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$ соответственно. Если $\det A \neq 0$, то

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Если $\det D \neq 0$, то

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C).$$

Доказательство. Пусть $\det A \neq 0$, тогда

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

откуда следует что требовалось, и аналогично — второе равенство.

Лемма о перестановке. Пусть b и c — матрицы порядка $n \times m$. Тогда

$$\det(I_n + bc^*) = \det(I_m + c^*b).$$

Доказательство. По лемме Шура

$$\det(I_m + c^*b) = \det \begin{bmatrix} I_n & -b \\ c^* & I_m \end{bmatrix} = \det(I_n + bc^*).$$

Доказательство теоремы о перемещении в скалярном случае ($m = 1$). Расположение собственных чисел определяется коэффициентами характеристического определителя

$$\begin{aligned} \delta_L(\lambda) &= \det(\lambda I - A - BL) = \\ &= \det\{[\lambda I - A][I - (\lambda I - A)^{-1}BL]\} = \\ &= \det(\lambda I - A)[1 - L(\lambda I - A)^{-1}B] = \\ &= \delta_0(\lambda) - \det(\lambda I - A)L(\lambda I - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

Если мы хотим, чтобы коэффициенты $\delta_L(\lambda)$ принимали произвольные наперед заданные значения δ_i , то должна быть разрешима система

$$QL = \Delta,$$

где Δ — вектор коэффициентов многочлена $\delta_L(\lambda) - \delta_0(\lambda)$, а Q — матрица из признака управляемости $VIII_y$. По этому признаку разрешимость линейной системы эквивалентна управляемости пары $\{A, B\}$, что и требуется.

Лемма Хейнмана. *Если матрица*

$$R(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$$

имеет полный ранг, то для каждого ненулевого вектора вида $b = Bv$ найдется такая $m \times n$ -матрица F , что $R(A + BF, b)$ тоже имеет полный ранг.

Доказательство теоремы о перемещении в векторном случае ($m > 1$). Пусть пара $\{A, B\}$ управляема, тогда по I_y и лемме Хейнмана найдется такая матрица F , что пара $\{A + BF, b\}$ управляема. По доказанному скалярному варианту теоремы найдется такой вектор-строка l , что спектр $A + BF + bl$ расположен нужным образом. Взяв $L = F + vl$, получаем тот же спектр для $A + BL$.

Пусть пара $\{A, B\}$ не управляема, тогда по VII_y спектр A_{22} сдвинуть невозможно ни при какой матрице L . Теорема доказана.

Замечание. Приведенное доказательство только в случае $m = 1$ включает алгоритм построения обратной связи. Конструктивное доказательство в общем случае имеется, но оно более громоздко.

Доказательство леммы Хейнмана. Покажем существование такой последовательности векторов $\{v_k\}_0^{n-1}$, что оболочка векторов $x_1 = b$, $x_{k+1} = Ax_k + Bv_k$ совпадает с \mathbb{C}^n . Пусть это не так, то есть для некоторого $k < n$

$$Ax_k + Bv_k \in \mathcal{L} \ \forall v_k,$$

где \mathcal{L} — пространство, натянутое на x_1, x_2, \dots, x_k . Следовательно, $Ax_k \in \mathcal{L}$, $Bv_k \in \mathcal{L} \ \forall v_k$. Отсюда $Ax_j = x_{j+1} - Bv_j \in \mathcal{L}$, $j = 1, \dots, k-1$. Таким образом,

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow Ax \in \mathcal{L}.$$

Следовательно, $w, Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw$ при любом w лежат в \mathcal{L} , размерность которого строго меньше n . Это противоречит полному рангу $R(A, B)$, поэтому искомая последовательность $\{v_k\}_0^{n-1}$ существует.

Определим F из условия $Fx_k = v_k$ — это возможно, поскольку векторы x_k линейно независимы. Мы получили, что $x_k = (A + BF)^{k-1}b$, откуда следует полный ранг $R(A + BF, b)$, что и требовалось.

Доказательство теоремы о стабилизации.

$VII_c \Rightarrow L_c$: Сделаем замену переменных $x = S\tilde{x}$ с такой матрицей S , чтобы матрица $\tilde{A} = S^{-1}AS$ имела жорданову форму. Упорядочим ящики по возрастанию вещественной части их собственных чисел. Представим систему в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}=S^{-1}B} u,$$

где A_{22} объединяет все жордановы ящики, если такие имеются, у которых собственные числа лежат в области $\text{Re} \lambda \geq 0$. Таким образом, A_{11} — гурвицева матрица, а пара $\{A_{22}, B_2\}$ — управляемая (иначе было бы нарушено условие VII_c). По теореме о перестановке собственных чисел найдется такая матрица $L_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, что $A_{22} + BL_2$ — гурвицева матрица. Взяв $\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & L_2 \end{bmatrix}$, при $L = S\tilde{L}$ получаем L_c , поскольку $\tilde{A} + \tilde{B}L =$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_1L_2 \\ 0 & A_{22} + B_2L_2 \end{bmatrix}.$$

$VII_c \Rightarrow \text{нестабильность}$: Из неуправляемости подсистемы $\dot{\tilde{x}}_2 = A_{22}\tilde{x}_2 + B_2u$ по признаку VII_y следует, что из нее можно выделить еще одну такую подсистему, что общее уравнение имеет вид

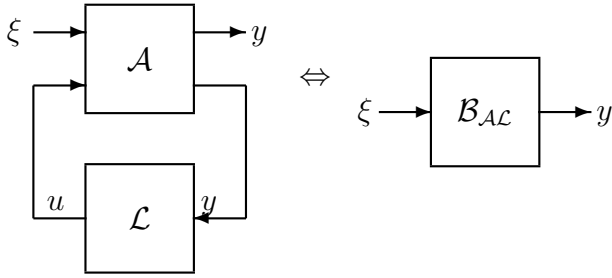
$$\dot{x} = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & 0 & \\ \hline 0 & A'_{11} & A'_{12} \\ & 0 & A'_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}'_1 \\ \tilde{x}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B'_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

причем весь спектр A_{22} лежит в правой полуплоскости. Ясно, что никакое управление не способно стабилизировать систему, если ее начальное состояние имеет, например, вид

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z'_2 \end{bmatrix} \text{ при } z'_2 \neq 0.$$

$L_c \Rightarrow \text{стабилизация}$ — очевидно. Теорема доказана.

Стабилизированность по выходу. Синтез обратной связи.



Определение. Система называется *стабилизированной по выходу* $y(\cdot)$, если существует такое управление $u(\cdot) = \mathcal{L}[z_0, y(\cdot)]$, что замкнутая система однозначно разрешима и устойчива.

Ищем такой динамический оператор \mathcal{L} (регулятор, обратная связь), чтобы замкнутая система была устойчивой (вариант — по выходу). Для линейных стационарных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi, \quad y = Cx + Du$$

обратную связь можно найти в виде

$$\dot{z} = Pz + Qy, \quad u = Lz + My,$$

или же ее вообще не существует.

Определение. Каноническая система называется *детектируемой*, если существует такая $n \times l$ -матрица K , что $A + KC$ — гурвицева матрица.

Из теоремы о перемещении и теореме о двойственности следует, что любая наблюдаемая система детектируема. Применяя к сопряженной системе (паре $\{A^*, C^*\}$) теорему о стабилизации, получаем теорему о детекции.

Теорема о детекции. *Каноническая линейная стационарная система детектируема* \Leftrightarrow

(VII_c) *Не существует такой неособой матрицы S , что*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = [C_1 \quad C_2],$$

где $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, $C_2 \in \mathbb{C}^{l \times n_2}$, $\tilde{A} = S^{-1}AS$, $\tilde{C} = S^{-1}C$, $\{A_{22}, C_2\}$ — ненаблюдаемая пара и весь спектр матрицы A_{22} лежит в множестве $\text{Re} \lambda \geq 0$.

Построение обратной связи по выходу с помощью наблюдателя.

Если наблюдению доступны все компоненты вектора состояния x , то задача стабилизации уже решена. Попробуем поэтому отыскать некоторую *оценку* \hat{x} вектора состояния и использовать ее вместо x .

Уравнения системы:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi, \quad y = Cx + Du.$$

Уравнения наблюдателя:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(\hat{y} - y) + \hat{\xi}, \quad \hat{y} = C\hat{x} + Du,$$

где K — матрица подходящей размерности,

$$\hat{\xi} = \begin{cases} \xi, & \text{если значения } \xi \text{ доступны измерению,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим $\Delta \hat{x} = x$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= A\Delta + K(C\hat{x} - Cx) + \hat{\xi} - \xi = \\ &= (A + KC)\Delta + (\hat{\xi} - \xi). \end{aligned}$$

Это уравнение описывает устойчивую систему, если матрица $A + KC$ гурвицева.

Теорема о стабилизированности по выходу.

Каноническая система стабилизирована по выходу $y(\cdot)$

\Leftrightarrow *Система стабилизирована (по состоянию) и детектируема. Стабилизирующую обратную связь можно задать уравнениями*

$$u = L\hat{x},$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(\hat{y} - y) + \hat{\xi}, \quad \hat{y} = C\hat{x} + Du,$$

где L и K таковы, что $A + BL$ и $A + KC$ — гурвицевы матрицы.

Доказательство. Достаточность уже доказана, необходимость стабилизированности по состоянию очевидна. Докажем необходимость детектируемости. Пусть ее нет, тогда по теореме о детекции найдется такая неособая матрица S , что после замены $x = S\tilde{x}$ система при $\xi \equiv 0$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + Bu, \\ y &= [C_1 \quad C_2] \tilde{x} + Du, \end{aligned}$$

где $\{A_{22}, C_2\}$ — ненаблюдаемая пара, и весь спектр A_{22} лежит в области $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. По признаку VII_n найдется такая неособая $n_2 \times n_2$ -матрица S' , что после замены $\tilde{x}_2 = S'x'$ уравнения системы приобретают вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & 0 & \\ \hline A_{21} & A'_{11} & 0 \\ & A'_{21} & A'_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + Bu,$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + Du.$$

Предположим, что рассматриваемая система стабилизируема по выходу. Пусть она замкнута стабилизирующей обратной связью $u(\cdot) = \mathcal{L}[z_0, y(\cdot)]$ (не обязательно линейной). Тогда нулевым начальным данным соответствует некоторый процесс $[x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), u(\cdot)] \in L_2[0, \infty)$. В силу однозначной разрешимости то же самое управление $u(\cdot)$ должно соответствовать начальным состоя-

ниям $x(0) = x_{\pm}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm x'_2 \end{bmatrix}$, где $x'_2 \neq 0$. Обозначим через $\Delta(t)$ третью (векторную) компоненту разности $x_+(t) - x_-(t)$. Тогда

$$\dot{\Delta} = A'_{22}\Delta, \quad \Delta(0) = 2x'_2.$$

Поскольку спектр A'_{22} лежит в области $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, это противоречит устойчивости замкнутой системы. Теорема доказана.

Невырожденность передаточных функций.

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

передаточная функция $\Phi(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$. Характеристический определитель: $\delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Определение. Собственное число λ_0 матрицы A — невырожденный полюс передаточной функции, если у матрицы $\Phi(\lambda)$ существует такой минор $\mu(\lambda)$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \delta(\lambda)\mu(\lambda) \neq 0.$$

Передаточная функция невырождена, если у нее нет вырожденных полюсов. Передаточная функция невырождена в множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, если у нее нет там вырожденных полюсов.

Частный случай: если передаточная функция — столбец или строка ($m = 1$ или $l = 1$), то невырожденность — это отсутствие общих корней у знаменателя передаточной функции $\delta(\lambda)$ и ее числителя $\delta(\lambda)\Phi(\lambda)$.

Теорема о невырожденности. Невырожденность передаточной функции $\Phi(\lambda)$ эквивалентна управляемости и наблюдаемости системы. Невырожденность $\Phi(\lambda)$ в замкнутой правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ эквивалентна стабилизируемости и детектируемости системы.

Доказательство. Для простоты — $m = l = 1$, не умаляя общности — $D = 0$. Обозначим

$$V(\lambda) = \delta(\lambda)(\lambda I - A)^{-1},$$

$$v(\lambda) = V(\lambda)B, \quad \beta(\lambda) = \delta(\lambda)\Phi(\lambda).$$

Пусть тройка $\{A, B, C\}$ управляема и наблюдаема. Предположим, что $\delta(\lambda_0) = \beta(\lambda_0) = 0$. По признаку $VIII_y$ коэффициенты многочлена $v(\lambda_0)$ линейно независимы, поэтому

$$v(\lambda_0) \neq 0,$$

но $(\lambda_0 I - A)v(\lambda_0) = \delta(\lambda_0)B = 0$ и $0 = \beta(\lambda_0) = C^*v(\lambda_0)$. Эти равенства противоречат признаку наблюдаемости V_y , невырожденность доказана.

невырожденность \Rightarrow управляемость: Пусть пара $\{A, B, C\}$ не управляема, тогда по VII_y

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & \lambda I - A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda I - A_{11})^{-1}B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Phi(\lambda) = C_1(\lambda I - A_{11})^{-1}B_1$, откуда следует вырожденность — противоречие.

невырожденность \Rightarrow наблюдаемость — аналогично.

Все рассуждения локальны по λ , поэтому вторая часть теоремы тоже доказана.

Стабилизация по выходу для функциональных моделей.

Система:

$$a(d/dt)y = b(d/dt)u,$$

передаточная функция $\Phi(\lambda) = a(\lambda)^{-1}b(\lambda)$; для простоты — собственная и скалярная.

Способы стабилизации:

1. Приводим систему к каноническому виду

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad \text{где}$$

$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & & \\ -a_2 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_{n-1} & & & & 1 \\ -a_n & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Если многочлены $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ не имеют общих корней в правой полуплоскости, то система получается стабилизируемая по состоянию и детектируемая — можно построить регулятор с наблюдателем.

2. Приводим систему к псевдоканоническому виду

$$\dot{x} = Ax + Bu^{(m)}, \quad \text{где}$$

$$x = [y^{(n-1)} \ y^{(n-2)} \ \dots \ y \ u^{(m-1)} \ u^{(m-2)} \ \dots \ u]^T,$$

$$B = [b_0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \quad A =$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n & b_1 & \dots & b_m & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ \hline 0 & \dots & & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \end{array} \right],$$

$$\text{тогда } \delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = a(\lambda)\lambda^m,$$

$$(\lambda I - A)^{-1}B =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \lambda^{n-1-m}b(\lambda)/a(\lambda) \\ \lambda^{n-2-m}b(\lambda)/a(\lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{-m}b(\lambda)/a(\lambda) \\ \lambda^{-1} \\ \vdots \\ \lambda^{-m} \end{bmatrix}}{\lambda^{-1}} = \frac{1}{\delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \lambda^{n-1}b(\lambda) \\ \lambda^{n-2}b(\lambda) \\ \vdots \\ b(\lambda) \\ \lambda^{m-1}a(\lambda) \\ \vdots \\ a(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Для синтеза обратной связи достаточно, чтобы пара $\{A, B\}$ была управляемой, что по признаку $VIII_y$ эквивалентно невырожденности матрицы, составленной из векторных коэффициентов многочлена $\delta(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}B$, то есть

$$R = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m \\ & & \ddots & & \ddots \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \\ \hline 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & & \ddots & & & \ddots \\ & & & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Определитель R называется *результантом* многочленов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Известно, что $\det R \neq 0 \Leftrightarrow$ у $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ нет общих корней. При этом условии можно построить стабилизирующую обратную связь

$$u^{(m)} = Lx \Leftrightarrow \alpha(d/dt)u = \beta(d/dt)y,$$

где $\alpha(\lambda) = \lambda^m - l_1\lambda^{m-1} - \dots - l_m$, $\beta(\lambda) = l_{m+1}\lambda^{n-1} + \dots + l_{m+n}$, $L = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{m+n}]^T$. Поскольку b_0 может быть нулем, можно взять $m = n - 1$ и обеспечить реализуемость регулятора.

Если у $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ общие множители устойчивы, то обе части уравнения системы можно

на них предварительно сократить:

$$\left. \begin{aligned} a(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)\tilde{a}(\lambda), \\ b(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)\tilde{b}(\lambda), \\ a(d/dt)y &= b(d/dt)u, \\ \operatorname{Re}\lambda_0 &< 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(d/dt - \lambda_0)[\tilde{a}(d/dt)y - \tilde{b}(d/dt)u] = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{a}(d/dt)y = \tilde{b}(d/dt)u + v(t), \quad v(t) \rightarrow 0.$$

Если существуют неустойчивые общие множители, то по теоремам о невырожденности и стабилизации по выходу задача неразрешима.

3. Наконец, можно прямо искать такие многочлены $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы

$$\begin{aligned} a(d/dt)y &= b(d/dt)u, \\ \alpha(d/dt)u &= \beta(d/dt)y \end{aligned}$$

был гурвицевым. Имеется в виду характеристический многочлен эквивалентной системы $\dot{x} = Ax$ в пространстве состояний. Нетрудно показать, что он равен

$$\delta_{\alpha,\beta}(\lambda) = a(\lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)\beta(\lambda).$$

Чтобы для заданного гурвицева многочлена $\zeta(\lambda)$ обеспечить равенство $\delta_{\alpha,\beta} \equiv \zeta(\lambda)$, коэффициенты многочленов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ нужно вычислить из линейной системы уравнений, матрица которой отличается от R только транспонированием. Соответственно, при несократимых многочленах получаем разрешимость и единственность решения, общие устойчивые множители можно заранее сократить, неустойчивый общий множитель делает задачу неразрешимой.

Дискретные системы.

$$\begin{aligned} x_k &= f_k(e_0, e_1, \dots, e_k, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), \\ s_k &= h_k(e_0, e_1, \dots, e_k, x_0, x_1, \dots, x_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Каноническая модель дискретной ЛСС:

$$\boxed{x_k + 1 = Ax_k + Be_k, \quad s_k = Cx_k + De_k.}$$

Функциональная модель:

$$\boxed{a(\nabla)s_k = b(\nabla)e_k,}$$

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n, \\ b(\lambda) &= b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m, \quad m \leq n, \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla x_k = x_{k+1}}$$

— сокращенная запись уравнения

$$\begin{aligned} s_{k+n} &= -a_1s_{k+n-1} - a_2s_{k+n-2} - \dots - a_ns_k + \\ &+ b_0e_{k+m} + b_1e_{k+m-1} + \dots + b_me_k. \end{aligned}$$

Z -преобразование:

Последовательность $\{x_k\}_0^\infty$ допускает z -преобразование, если

$$\exists \rho \in \mathbb{R} : \{\rho^{-k}x_k\} \in l_1,$$

$$\boxed{\tilde{x}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_0^\infty z^{-k}x_k, \quad z \in H_\rho = \{z : |z| > \rho\}}$$

$$\tilde{x}(\cdot) = Z[\{x_k\}] \Leftrightarrow \{x_k\} \doteq \tilde{x}(\cdot) \Leftrightarrow \tilde{x}(\cdot) \doteq \{x_k\}.$$

Аналитическое продолжение: $\rho^k \doteq z/(z - \rho)$.

Единственность:

$$Z[\{x'_k\}] = Z[\{x''_k\}] \Leftrightarrow \tilde{x}'(\cdot) = \tilde{x}''(\cdot).$$

Обратное преобразование:

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(z)z^k \frac{dz}{z},$$

где C — замкнутый контур вокруг нуля, лежащий в области сходимости.

Свойства z -преобразования: линейность,

$$\begin{aligned} \{\nabla x_k\} &\doteq \sum_0^\infty z^{-k}x_{k+1} = z \sum_0^\infty z^{-k-1}x_{k+1} = \\ &= z \sum_1^\infty z^{-k}x_k = z\tilde{x}(z), \end{aligned}$$

если $x_0 = 0$ (мягкий сигнал),

$$\{\rho^k x_k\} \doteq \sum_0^{\infty} z^{-k} \rho^k x_{k+1} = \sum_0^{\infty} (z/\rho)^{-k} x_{k+1} = \tilde{x}(z/\rho),$$

$$[\{x_i\} * \{y_i\}]_k = \sum_{j=0}^k x_j y_{k-j} \doteq \sum_0^{\infty} z^{-k} \sum_{j=0}^k x_j y_{k-j} =$$

$$= \sum_0^{\infty} \sum_{j=0}^k x_j z^{-j} y_{k-j} z^{j-k} =$$

$$= \left(\sum_0^{\infty} z^{-k} x_k \right) \left(\sum_0^{\infty} z^{-k} y_k \right) = \tilde{x}(z) \tilde{y}(z),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{x}(v) \tilde{y}(z/v) \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_0^{\infty} v^{-k} x_k \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{v}\right)^{-k} y_k \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k v^{-j} x_j \left(\frac{z}{v}\right)^{j-k} y_{k-j} \frac{dv}{v} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{j=0}^k v^{2j-k} x_j z^j y_{k-j} \frac{dv}{v} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \underbrace{\sum_{j=0}^{2k} v^{2j-2k} x_j z^j y_{2k-j} \frac{dv}{v}}_{=0 \text{ при } j \neq k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \underbrace{\sum_{j=0}^{2k+1} v^{2j-2k-1} x_j z^j y_{2k+1-j} \frac{dv}{v}}_{=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} x_k z^k y_k = Z[\{x_k y_k\}](z).$$

Если обе последовательности суммируемы, то можно взять контур $C = \{|v| = 1\}$, и тогда при $z = 1$ получаем

$$\sum_0^{\infty} x_k \bar{y}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{x}(e^{i\omega}) \bar{\tilde{x}}(e^{i\omega}) d\omega.$$

В частности, при $y_k \equiv x_k$

$$\sum_0^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{x}(e^{i\omega})|^2 d\omega.$$

(равенство Парсиваля).

Передаточные функции.

Поскольку (при нулевых начальных данных) сдвигу оригинала соответствует умножение образа на z , то

$$\tilde{s}(\lambda) = [C(\lambda I - A)^{-1}B + D]\tilde{e}(\lambda)$$

для канонической дискретной ЛСС, и

$$\tilde{s}(\lambda) = [a(\lambda)^{-1}b(\lambda)]\tilde{e}(\lambda)$$

— для функциональной, где в фигурных скобках стоят передаточные функции. Они равны z -преобразованию от импульсной реакции (реакции системы на вход $\{1, 0, 0, \dots\}$).

Определение. Каноническая дискретная линейная стационарная система *управляема*, если для любых x', x'' найдется такое управление u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , которое при $x_0 = x'$ обеспечивает равенство $x_n = x''$. Система *наблюдаема*, если из совпадения входов и выходов на отрезке длиной n следует совпадение состояний.

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_0 = x' \Rightarrow$$

$$x_n = A^n x' + A^{n-1}Bu_0 + A^{n-2}Bu_1 + \dots + Bu_{n-1} =$$

$$= A^n x' + [A^{n-1}B \ A^{n-2}B \ \dots \ B] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что управляемость эквивалентна невырожденности матрицы $[A^{n-1}B \ A^{n-2}B \ \dots \ B]$, поэтому справедливы и остальные критерии управляемости; аналогично с наблюдаемостью.

Теорема. Устойчивость канонической системы \Leftrightarrow спектр A лежит внутри единичной окружности.

Доказательство — через жорданову форму.

Стабилизируемость, детектируемость, стабилизация по выходу — аналогично непрерывным системам.

Дискретизация.

Рассмотрим каноническую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (3)$$

Управляющее воздействие кусочно-постоянно с фиксированным шагом (*периодом дискретизации*) $h > 0$:

$$u(kh + \varepsilon) = u_k, \quad \varepsilon \in [0, 1), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

Из (3) по формуле Коши следует, что

$$\begin{aligned} x(kh + h) &= e^{hA}x(kh) + \int_0^h e^{sA}Bu[(k+1)h - s]ds = \\ &= e^{hA}x(kh) + \int_0^h e^{sA}Bds \cdot u_k, \end{aligned}$$

то есть

$$x_{k+1} = Px_k + Qu_k, \quad y_k = Cx_k, \quad (5)$$

где $x_k = x(kh + 0)$,

$$P = e^{hA}, \quad Q = A^{-1}(e^{hA} - I)B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} A^{i-1}B, \quad (6)$$

причем Q понимается именно в смысле суммы ряда, и потому определено даже при $\det A = 0$.

Теорема о наследовании свойств в пространстве состояний. *Если система (3) управляемая (стабилизируемая, наблюдаемая, детектируемая), то порождаемая дискретизацией система (5) также управляема (стабилизируема, наблюдаема, детектируема) для любого периода дискретизации h , исключая не более чем счетный набор отделенных от нуля значений.*

Доказательство. Потребуем, чтобы

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow e^{h\lambda_i} \neq e^{h\lambda_j} \quad (7)$$

для собственных чисел A . Поскольку при $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$

$$e^{h\lambda_i} = e^{h\lambda_j} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i = \alpha_j, \\ h\beta_i = h\beta_j + 2\pi k \end{cases}$$

условие (7) выполнено при всех $h > 0$, исключая не более чем счетное множество, отделенное от нуля.

Докажем наследование наблюдаемости. Пусть матрица A приведена к жордановой форме:

$$A = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k),$$

где J_i — жордановы блоки. Тогда

$$e^{hA} = \text{diag}(e^{hJ_1}, e^{hJ_2}, \dots, e^{hJ_k}), \quad \text{где}$$

$$e^{hJ_i} = e^{h\lambda_i} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & h & & & \\ & h^2/2 & & 1 & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots \\ h^{n_i-1}/(n_i-1)! & & \dots & h & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что пара $\{e^{hA}, L\}$ не наблюдаема. Тогда по VI_n существует такой вектор

$$z = (z_1^T, z_2^T, \dots, z_k^T)^T \neq 0, \quad \text{что } e^{hA}z = \mu z, \quad Cz = 0.$$

Ясно, что $\mu = e^{h\lambda_{i_0}}$ при некотором i_0 ; перенумеруем собственные числа таким образом, чтобы i_0 было равно единице. Итак,

$$e^{hA}z = e^{h\lambda_1}z, \quad Cz = 0.$$

Таким образом, $e^{hJ_i}z_i = e^{h\lambda_1}z_i \forall i$, и в силу (7) $z_i = 0$ для всех таких i , что $\lambda_i \neq \lambda_1$. Следовательно, z — ненулевой собственный вектор A и $Cz = 0$, что противоречит наблюдаемости пары $\{A, C\}$.

Поскольку все рассуждения локальны относительно собственных чисел, детектируемость тоже доказана. Докажем наследование управляемости.

Пусть пара $\{A, B\}$ управляема. Тогда по уже доказанному наследованию наблюдаемости и теореме о двойственности управляема пара $\{e^{hA}, B\}$. В силу I_y матрица

$$R = [B, e^{hA}B, \dots, e^{(n-1)hA}B]$$

имеет максимальный ранг. Матрица $A^{-1}(e^{hA} - I)$ невырожденная, поэтому полный ранг имеет также и матрица

$$\begin{aligned} A^{-1}(e^{hA} - I)R &= \\ &= A^{-1}(e^{hA} - I)[B, e^{hA}B, \dots, e^{(n-1)hA}B] = \\ &= [Q, PQ, \dots, P^{n-1}Q]. \end{aligned}$$

Управляемость при $\rho = 0$ доказана, наследование стабилизируемости доказывается аналогично.

Дискретизация функциональных моделей.

Рассмотрим

$$a(d/dt)y = b(d/dt)u, \quad (8)$$

где

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n, \quad (9)$$

$$b(\lambda) = b_0 \prod_{j=1}^m (\lambda - \mu_j) = b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_m, \quad (10)$$

причем $m \leq n$. Для равноотстоящих значений выхода

$$y_k = y(hk) \quad (11)$$

справедливо разностное уравнение

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_k, \quad (12)$$

где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — некоторые многочлены. Действительно, уравнение (8) можно переписать в форме пространства состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где A, B и C — произвольные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times 1$ и $n \times 1$ соответственно, для которых справедливы равенства

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad b(\lambda) = a(\lambda)C^*(\lambda I - A)^{-1}B,$$

причем пара $\{A, C\}$ предполагается наблюдаемой. По формуле Коши

$$x_{k+1} = Px_k + Qu_k, \quad y_k = C^*x_k,$$

где $x_k = x(kh + 0)$,

$$P = e^{hA}, \quad Q = A^{-1}(e^{hA} - I)B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^i}{i!} A^{i-1}B.$$

Переходя от канонической дискретной модели к функциональной, получаем (12) с многочленами

$$\alpha(\lambda) = \det(\lambda I - P), \quad \beta(\lambda) = \alpha(\lambda)C^*(\lambda I - P)^{-1}Q.$$

Таким образом,

$$\alpha(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - e^{h\lambda_i})$$

Теорема о наследовании невырожденности. Пусть исходная система невырождена (невырождена в правой полуплоскости). Тогда в результате дискретизации для любого периода h , исключая не более чем счетный набор отдельных от нуля значений, получается дискретная невырожденная система (система, невырожденная вне единичного круга).

Доказательство. По теореме о невырожденности пара $\{A, B\}$ управляема. По теореме о наследовании свойств пара $\{P, Q\}$ управляема при почти всех h , а пара $\{P, C\}$ — наблюдаема. По теореме о невырожденности получаем невырожденность дискретной функциональной модели.

Следствие. Невырожденность позволяет построить стабилизирующие дискретные обратные связи по выходу — с наблюдателем или вида

$$\gamma(\nabla)u_k = \delta(\nabla)y_k.$$

Как нетрудно видеть, они стабилизируют не только дискретную модель, но и непрерывный прототип.

0.1 Оптимальные регуляторы для минимально-фазовых объектов.

До сих пор мы рассматривали только простейшие объекты управления — дискретные минимально-фазовые, и запаздывание было минимальным. Попробуем усложнить ситуацию, допустив запаздывание в управлении. Для начала, как и раньше, будем рассматривать задачу об оптимальном управлении объектом с известными параметрами. В дальнейшем это позволит сравнить гарантируемый адаптивным регулятором уровень функционала качества с минимально возможным. Построение оптимального регулятора, кроме того, позволяет ответить на вопрос об идеальном решении системы рекуррентных неравенств, существование которого обеспечивает работоспособность алгоритма адаптации.

Итак, мы рассматриваем объекты управления

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-l} + v_{t+n} \quad (13)$$

с ограниченным возмущающим воздействием. В отличие от (2 с.4), управление u_k теперь оказывает свое воздействие на объект с постоянным

известным запаздыванием $l > 0$. Как и прежде, многочлен $\beta(\lambda)$ предполагается устойчивым, и его старший коэффициент отличен от нуля. Относительно возмущения вместо (?? с.??) будем предполагать, что

$$|\zeta(\nabla)v_k| \leq C_v, \quad (14)$$

где $\zeta(\lambda)$ — устойчивый многочлен степени $m \geq 0$ с единичным старшим коэффициентом, а в остальном возмущающее воздействие произвольно. В класс таких возмущений входят, например, суммы нескольких синусоид с неизвестными фазами и амплитудами. Будем обозначать

$$w_k = \zeta(\nabla)v_{k-m}. \quad (15)$$

Определим многочлены $\delta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ как частное и остаток от деления λ^{n+l+m} на $\zeta(\lambda)\alpha(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+l+m} &= \delta(\lambda)\zeta(\lambda)\alpha(\lambda) + \gamma(\lambda), \\ \delta(\lambda) &= \lambda^l + \delta_1\lambda^{l-1} + \delta_2\lambda^{l-2} + \dots + \delta_l, \\ \gamma(\lambda) &= \gamma_0\lambda^{n+m-1} + \gamma_1\lambda^{n+m-2} + \dots + \gamma_{n+m-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из уравнения (13 с.21) следует, что

$$\begin{aligned} y_{k+l} &= \nabla^{n+m+l}y_{k-n-m} = \\ &= (\delta(\nabla)\zeta(\nabla)\alpha(\nabla) + \gamma(\nabla))y_{k-n-m} = \\ &= \delta(\nabla)[\zeta(\nabla)\alpha(\nabla)y_{k-n-m}] + \gamma(\nabla)y_{k-n-m} = \\ &= \delta(\nabla)[\zeta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-l-n-m} + \zeta(\nabla)v_{k-m}] + \\ &\quad + \gamma(\nabla)y_{k-n-m} = \\ &= \{\delta(\nabla)\zeta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-l-n-m} + \gamma(\nabla)y_{k-n-m}\} + \\ &\quad + \delta(\nabla)w_k. \end{aligned}$$

Определим векторы τ_* и φ_k таким образом, чтобы сумма в фигурных скобках была равна $\tau'_*\varphi_{k-1}$, то есть компонентами τ_* служат коэффициенты многочленов $\delta(\lambda)\zeta(\lambda)\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$, а

$$\varphi_k = (u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-l-m-n+1}, y_k, \dots, y_{k-n-m+1})'. \quad (17)$$

Поскольку старший коэффициент $\delta(\lambda)$ — единица, то первая компонента вектора τ_* не равна нулю.

Итак, для всех решений уравнения (13 с.21) справедливо равенство

$$y_{k+l} = \tau'_*\varphi_{k-1} + \delta(\nabla)w_k, \quad (18)$$

где φ_k — вектор (17), а компоненты τ_* и $\delta(\lambda)$ однозначно определяются по параметрам объекта и возмущения.

Теорема 1. Регулятор

$$\tau'_*\varphi_k = 0 \quad (19)$$

делает замкнутую систему диссипативной и минимизирует функционал

$$J = \sup_{\{v_k\}:(14)} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |y_k|,$$

доставляя ему значение

$$J_* = (1 + |\delta_1| + |\delta_2| + \dots + |\delta_l|)C_v. \quad (20)$$

Доказательство. Регулятор (19) в силу (18) обеспечивает равенство

$$y_{k+l} = \delta(\nabla)w_k, \quad (21)$$

поэтому для этого регулятора значение функционала J не может быть больше J_* .

С другой стороны, для произвольного регулятора значение J не может быть меньше J_* . Действительно, пусть объект (13 с.21) замкнут некоторой обратной связью. Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} w_{K(l+1)-j} &= \text{sign}(\tau'_*\varphi_{(K-1)(l+1)})C_v \text{sign} \delta_j, \\ K &= 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, l, \end{aligned}$$

и определим возмущение $\{v_k\}$ из уравнения (15). Тогда из (18) следует, что $|y_{K(l+1)}| \geq J_*$, откуда и $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |y_k| \geq J_*$, то есть $J \geq J_*$, что и требовалось.

Наконец, диссипативность замкнутой системы следует из (21) в силу минимальной фазовости объекта. Теорема доказана.

Замечание. Если вместо (14) для возмущения выполнено среднеквадратичное ограничение вида (?? с.??), то регулятор (19), в отличие от случая минимального запаздывания, оптимальным не является. Решение такой задачи известно в классе линейных регуляторов, в этой постановке она сводится к проблеме Каратеодори-Фейера, и оптимальный регулятор не совпадает с (19).

0.2 Субоптимальное управление непрерывными объектами.

Рассмотрим непрерывные объекты

$$a(d/dt)y(t) = b(d/dt)u(t) + v(t) \quad (22)$$

с ограниченным возмущением

$$|v(t)| \leq C_v \quad (23)$$

и управлением $u(\cdot)$, которое будем определять кусочно-постоянным образом

$$u(kh + \varepsilon) = u_k, \quad \varepsilon \in [0, h) \quad (24)$$

с фиксированным периодом дискретизации h . Для величин u_k и $y_k = y(kh)$ справедливо разностное уравнение

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_k + v_{k+n}, \quad (25)$$

в котором $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — результат преобразования порядка 0, а

$$v_k = \int_{0 \leq s_j \leq h} e^{j=1} \sum_{s_j \lambda_j} v(kh - \sum_{j=1}^n s_j) ds_1 ds_2 \dots ds_n. \quad (26)$$

В этой формуле величины λ_j — это, напомним, корни многочлена $a(\lambda)$ из левой части уравнения (22). Обосновать ее достаточно при $u(t) \equiv 0$, это легко достигается индукцией по n .

Рассмотрим функционал качества управления

$$J_c = \sup_{v(\cdot):(23)} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t)|, \quad (27)$$

и попробуем минимизировать его для объектов управления из описанного выше класса Θ , которые после дискретизации переходят в минимально-фазовые объекты (25).

Перепишем уравнение (25) в виде

$$y_k - \varphi'_{k-1} \tau = v_k, \quad (28)$$

где

$$\tau = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)',$$

$$\varphi_k = (u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n+1}, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n+1})'.$$

Из (23),(26) следует, что

$$|v_k| \leq C_v(h) \stackrel{\text{def}}{=} h^n e^{\max_j \text{Re} \lambda_j} C_v. \quad (29)$$

Поэтому регулятор

$$\varphi'_{k-1} \tau = 0 \quad (30)$$

обеспечивает равенство $y_k = v_k$, откуда $|y_k| \leq C_v(h)$. Казалось бы, отсюда при надлежащем выборе h следует субоптимальность, так как $C_v(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Это и в самом деле верно, однако пока что такое заключение ничем не обосновано, поскольку функционал (27) включает значения выхода во все моменты непрерывного времени, а не только в кратные h . Таким образом, необходимо оценить поведение выхода $y(t)$ в промежуточные между kh моменты.

Для удобства формулировок определим условия, общие для нескольких последующих утверждений. Будем предполагать, что управляющее воздействие удовлетворяет равенствам (24), а возмущение — неравенству (23). Подразумевается, далее, что непрерывный объект управления (22) принадлежит классу Θ , то есть при дискретизации с достаточно малым периодом h переходит в минимально-фазовый дискретный объект (25). Обозначим

$$l = n - m \quad (\text{разность степеней многочленов } a(\lambda) \text{ и } b(\lambda)),$$

$$C_y = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |y_k|,$$

$$C'_y = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |y_k - y_{k-1}|,$$

$$\overline{C}_y = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |y(t)|,$$

$$C_u = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k|.$$

Лемма 1. *Имеют место следующие неравенства*

$$C_u \leq \mathcal{O}(1)C_v + C_y \mathcal{O}(1)h^{-l}, \quad (31)$$

$$C_u \leq \mathcal{O}(1)C_v + C'_y \mathcal{O}(1)h^{-l} + C_y \mathcal{O}(1)h^{1-l}, \quad (32)$$

$$\overline{C}_y \leq C_y + \mathcal{O}(h^n)C_v + \mathcal{O}(h^2)C_u. \quad (33)$$

Доказательство. Представим управляющее воздействие в виде суммы: $u_k = u'_k + u''_k$, где

$$\beta_0^{-1}\beta(\nabla)u'_k = \beta_0^{-1}\prod_{i=1}^n(\nabla - e^{h\lambda_i})y_k,$$

$$\beta_0^{-1}\beta(\nabla)u''_k = -\beta_0^{-1}v_{k+n},$$

β_0 — старший коэффициент $\beta(\lambda)$. Рассмотрим случай $l = 1$. Тогда по теореме ?? с.?? $\beta_0 = hb_1 + \mathcal{O}(h)$,

$$\beta_0^{-1}\beta(\lambda) = \prod_{j=1}^{n-1}(\lambda - e^{h\mu_j(h)}), \quad \mu_j(h) \rightarrow \mu_j, \quad \operatorname{Re}\mu_j < 0.$$

Определим $u_k^0 = \beta_0^{-1}(y_{k+1} - e^{h\lambda_n}y_k)$, а при $i = 1, 2, \dots, n-1$ положим

$$u_k^i = e^{h\mu_{i+1}(h)}u_{k-1}^i + u_{k-1}^{i-1} - e^{h\lambda_{i+1}}y_{k-1}^{i-1}.$$

Ясно, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k^0| \leq C'_y \mathcal{O}(1)h^{-1} + C_y \mathcal{O}(1)$, и

$$\begin{aligned} (\nabla - e^{h\mu_{i+1}(h)})(u_k^i - u_{k-1}^{i-1}) &= (e^{h\mu_{i+1}(h)} - e^{h\lambda_{i+1}})u_{k-1}^{i-1} = \\ &= \mathcal{O}(h)u_{k-1}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u'_k| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u_k^{n-1}| \leq C'_y \mathcal{O}(1)h^{-1} + C_y \mathcal{O}(1).$$

Для $\{u''_k\}$ в силу (29 с.23) справедлива оценка $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |u''_k| \leq C_v \mathcal{O}(1)$. Поэтому для $u_k = u'_k + u''_k$, справедливы неравенства (31 с.23), (32 с.23). Аналогичные рассуждения справедливы и в случае $l = 2$.

Чтобы обосновать (33 с.23), кроме основного периода дискретизации h рассмотрим кратный ему $H = Lh$. При уменьшении h значение H предполагается отделенным от нуля и таким, чтобы пара $\{C, e^{HA}\}$ была наблюдаемой, где C и A — матрицы из уравнения (3 с.20). Из этого уравнения следует, что

$$\begin{aligned} y_{k+jL} &= C^* e^{jHA} x(kh) + \\ &+ \int_0^{jH} C^* e^{sA} (Bu(kh + jH - s) + B_v v(kh + jH - s)) ds, \\ &j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

поэтому

$$C_x \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |x(kh)| \leq \mathcal{O}(1)(C_y + C_u + C_v). \quad (34)$$

Рассмотрим теперь функцию $y(\cdot)$ на временном промежутке $[kh, (k+1)h]$ и сравним ее значения с $\bar{y}(t) = \{(t-kh)y_{k+1} + [(k+1)h-t]y_k\}/h$, то есть с линейной функцией, проходящей через y_k и y_{k+1} в соответствующие моменты. По формуле Коши

$$\begin{aligned} y(kh + \varepsilon) - \bar{y}(kh + \varepsilon) &= \\ &= C^* \left(e^{\varepsilon A} - \frac{\varepsilon}{h} e^{hA} - \frac{h-\varepsilon}{h} I \right) x(kh) + \\ &+ \int_0^\varepsilon C^* e^{sA} B ds u_k - \frac{\varepsilon}{h} \int_0^h C^* e^{sA} B ds u_k + \\ &+ \int_0^\varepsilon C^* e^{sA} B_v v(kh + \varepsilon - s) ds - \\ &- \frac{\varepsilon}{h} \int_0^h C^* e^{sA} B_v v(kh + h - s) ds = \\ &= \mathcal{O}(h^2)x(kh) + \mathcal{O}(h^2)u_k + \int_0^h \mathcal{O}(h^{n-1})v(kh + s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует (33 с.23), лемма доказана.

Теорема 2. Для объектов (22 с.23) из класса Θ регулятор (24 с.23), (30 с.23) обеспечивает диссипативность замкнутой системы и доставляет функционалу (27 с.23) значение $\mathcal{O}(h)$.

Доказательство. Из (28 с.23), (29 с.23), (30 с.23) следует, что $C_y = \mathcal{O}(h^n)C_v$. Применяя (31 с.23) и (33 с.23), получаем

$$\begin{aligned} \bar{C}_y &\leq C_y + \mathcal{O}(h^n)C_v + \mathcal{O}(h^2)C_u = \\ &= \mathcal{O}(h^n)C_v + \mathcal{O}(h^2)(\mathcal{O}(1)C_v + C_y \mathcal{O}(1)h^{-l}) = \mathcal{O}(h)C_v, \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Поскольку функционал (27 с.23) неотрицателен, мы построили субоптимальное управление. Результат, правда, получился неинтересным, поскольку той же цели можно достичь с помощью любой достаточно сильной обратной связи $u(t) = -K(\operatorname{sign} b_0)y(t)$. Ситуация меняется при наличии запаздывания $\mathcal{L} > 0$, когда вместо (22 с.23) объект управления описывается уравнением

$$a(d/dt)y(t) = b(d/dt)u(t - \mathcal{L}) + v(t), \quad (35)$$

которое после дискретизации переходит в

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-L} + v_{k+n} \quad (36)$$

(целочисленное запаздывание $L = \mathcal{L}/h$ предполагается целым). При наличии сколь угодно малого запаздывания минимальное значение функционала качества отделено от нуля, а любая достаточно сильная обратная связь делает замкнутую систему неустойчивой.

Рассмотрим задачу оптимизации функционала (27 с.23) при $\mathcal{L} = 1$ (этого всегда можно добиться изменением масштаба времени). Если бы исходным описанием объекта управления было разностное уравнение (36), а дискретное возмущение v_k в этом уравнении было ограниченным и в остальном произвольным, для дискретного функционала

$$J_d = \sup_{|v_k| \leq C_v(h)} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |y_k|$$

решение доставлялось бы теоремой 1 с.22. По этой теореме нужно определить многочлены $\delta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ как частное и остаток от деления λ^{n+L} на $\alpha(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+L} &= \delta(\lambda)\alpha(\lambda) + \gamma(\lambda), \\ \delta(\lambda) &= \lambda^L + \delta_1\lambda^{L-1} + \delta_2\lambda^{L-2} + \dots + \delta_L, \\ \gamma(\lambda) &= \gamma_0\lambda^{n-1} + \gamma_1\lambda^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1}, \end{aligned}$$

и воспользоваться обратной связью

$$\delta(\nabla)\beta(\nabla)u_k + \gamma(\nabla)y_{k+L} = 0. \quad (37)$$

На самом деле мы управляем не дискретным, а непрерывным объектом (35 с.24), минимизируем функционал J_c , а не J_d , и возмущение (26 с.23) хоть и ограничено в силу (29 с.23), но вовсе не произвольно в промежутке $[-C_v(h), C_v(h)]$. Тем не менее, регулятор (37) оказывается субоптимальным, то есть сколь угодно близким к оптимальному по уровню функционала J_c при надлежащем выборе периода дискретизации h . чтобы убедиться в этом, понадобятся дополнительные построения.

Определим в $R^n = \{s\}$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)'$ множества

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ s : s_j \geq 0, \sum_{j=1}^n s_j \leq 1 \right\}, \\ \Omega(n, h, K) &= \left\{ s : s_j \geq 0, \sum_{j=1}^n E(s_j/h) \leq K \right\}, \end{aligned}$$

где $E(x)$ — целая часть числа x .

Лемма 2. Из дифференциального уравнения (35 с.24) при условии (24 с.23) следует, что

$$y_{k+L+n} = \delta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-L} + \gamma(\nabla)y_k + \quad (38)$$

$$+ \int_{\Omega(n, h, L)} \sum_{j=1}^n s_j \lambda_j v \left((k+L+n)h - \sum_{j=1}^n s_j \right) ds_1 \dots ds_n.$$

Доказательство. Формулу (38) достаточно доказать отдельно для случаев $v \equiv 0$ и $u \equiv 0$. Пусть сначала $v \equiv 0$. Тогда из (36) по определению многочленов $\delta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ следует, что

$$\begin{aligned} y_{k+n+L} &= \nabla^{n+L}y_k = [\delta(\nabla)\alpha(\nabla) + \gamma(\nabla)]y_k = \\ &= \delta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-L} + \gamma(\nabla)y_k, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть теперь $u \equiv 0$. Определим функции

$$y_j(t) = \prod_{i=j+1}^n \left(\frac{d}{dt} - \lambda_i \right) y(t), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

тогда $y_0(t) = v(t)$, $y_n(t) = y(t)$,

$$dy_j(t)/dt = \lambda_j y_j(t) + y_{j-1}(t). \quad (39)$$

Покажем, что для некоторых величин $\gamma_i(l, j)$, $i = 1, 2, \dots, j$, $j = 1, 2, \dots, n$ справедливы равенства

$$y_j(t) = \sum_{i=1}^j \gamma_i(l, j) y_j(t - (l+i)h) + \quad (40)$$

$$+ \int_{\Omega(j, h, l)} \sum_{i=1}^j s_i \lambda_i v \left((k+l+j)h - \sum_{i=1}^j s_i \right) ds_1 \dots ds_n.$$

Тогда при $j = n$, $l = L$ мы получим (38) — величины $\gamma_i(L, n)$ должны совпасть с коэффициентами многочлена $\gamma(\lambda)$, поскольку при $v \equiv u \equiv 0$ формула (40) должна совпадать с уже доказанной для этого случая формулой (38).

Воспользуемся индукцией. При $j = 1$ формула (40) справедлива для любого l , поскольку из (39) по формуле Коши следует, что

$$y_1(t) = e^{(l+1)h\lambda_1} y_1(t - (l+1)h) + \int_0^{(l+1)h} e^{\lambda_1 s} v(t-s) ds.$$

Таким образом, база индукции имеется, попробуем обосновать индуктивный переход. Пусть формула (40 с.25) при некотором $j = k$ уже доказана для всех l . Возьмем некоторое $l > 0$ и докажем справедливость (40 с.25) при $j = k + 1$. Из (39 с.25) имеем

$$y_{k+1}(t) - e^{h\lambda_{k+1}} y_{k+1}(t-h) = \int_0^h e^{s\lambda_{k+1}} y_k(t-s_{k+1}) ds_{k+1}.$$

Отсюда по индуктивному предположению следует, что

$$\begin{aligned} & y_{k+1}(t-jh) - e^{h\lambda_{k+1}} y_{k+1}(t-(j+1)h) - \\ & - \sum_{i=1}^k \gamma_i(l-j, k) y_{k+1}(t-(l+i)h) + \\ & + \sum_{i=1}^k \gamma_i(l-j, k) e^{h\lambda_{k+1}} y_{k+1}(t-(l+i+1)h) = \\ & = \int_0^h e^{s\lambda_{k+1}} \int_{\Omega(j, h, l)} e^{\sum_{i=1}^j s_i \lambda_i} \times \\ & \times v \left((k+l+j)h - s_{k+1} - \sum_{i=1}^j s_i \right) ds_1 \dots ds_k ds_{k+1}, \\ & \quad j = 0, 1, \dots, l-1. \end{aligned}$$

Домножив j -ое из этих равенств на $e^{jh\lambda_{k+1}}$ при $j = 0, 1, \dots, l-1$ и сложив результаты, получаем (40 с.25) при $j = k+1$. Индуктивный переход обоснован, и тем самым лемма доказана.

Перепишем еще раз объект управления (22 с.23) в форме пространства состояний:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-1) + B_v v(t), \quad y(t) = C^* x(t).$$

Определим $\bar{J}_c = \inf J_c$ по всем обратным связям, и величины

$$\hat{J} = \int_0^1 |C^* e^{sA} B_v| ds,$$

$$\tilde{J} = \sup_{|v(t)| \leq 1} \int_{\Omega} e^{\sum_{j=1}^n s_j \lambda_j} v \left(1 - \sum_{i=1}^n s_i \right) ds_1 \dots ds_n.$$

Лемма 3. *Справедливы соотношения*

$$\hat{J} = \tilde{J}, \quad (41)$$

$$\bar{J}_c \geq \hat{J} C_v. \quad (42)$$

Доказательство. По формуле Коши из уравнения объекта в пространстве состояний при $u \equiv 0$ следует, что

$$y(t) = C^* e^{tA} x(t-1) + \int_0^1 C^* e^{sA} B_v v(t-s) ds.$$

Если $v(s) = 0$ при $s \leq t-1$, то сравнивая это равенство с (38 с.25), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 C^* e^{sA} B_v v(t-s) ds = \\ & = \int_{\Omega} e^{\sum_{j=1}^n s_j \lambda_j} v \left((k+L+n)h - \sum_{j=1}^n s_j \right) ds_1 \dots ds_n. \end{aligned}$$

При $v(t-s) = \text{sign } C^* e^{sA} B_v$ отсюда, в частности, следует (41).

Чтобы обосновать (42), воспользуемся еще раз уравнением объекта управления в пространстве состояний. По формуле Коши

$$\begin{aligned} y(t+1) - \int_0^1 C^* e^{sA} B_v v(t+1-s) ds & = r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \\ & = C^* e^{tA} x(t) + \int_0^1 C^* e^{sA} B_u u(t-s) ds. \end{aligned}$$

К моменту t значение правой части этого равенства уже определено. Поэтому, каковы бы не были значения управления, возмущающее воздействие

$$v(k+\varepsilon) = C_v \text{sign } C^* e^{(1-\varepsilon)A} B_v \text{sign } r(k)$$

обеспечивает неравенство $|y(k)| \geq C_v \hat{J}$, откуда и следует (42). Лемма доказана.

Обозначим

$$H_k = y_k - \{\delta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-2L-n} + \gamma(\nabla)y_{k-L-n}\}.$$

Лемма 4. *Имеют место неравенства*

$$|H_k| \leq \bar{J}_c + C_v \mathcal{O}(h), \quad (43)$$

$$|H_k - H_{k-1}| \leq (2C_v + |H_{k-1}|)e^{n \max_j \operatorname{Re} \lambda_j} h. \quad (44)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (38 с.25). Из нее в силу (37 с.25) следует, что

$$H_k = \int_{\Omega(n,h,L)} \sum_{j=1}^n e^{s_j \lambda_j} v \left(kh - \sum_{j=1}^n s_j \right) ds_1 \dots ds_n.$$

По лемме 3 с.26 отсюда следует (43) поскольку Ω и $\Omega(n, h, L)$ при $L = 1/h$ различаются на множество меры $\mathcal{O}(h)$.

Из (37 с.25), (38 с.25) следует также, что

$$\begin{aligned} H_k - e^{h\lambda_n} H_{k-1} &= \\ &= \int_{\Omega(n,h,L)} e^{\sum s_j \lambda_j} v \left(kh - \sum s_j \right) ds_1 \dots ds_n - \\ &- e^{h\lambda_n} \int_{\Omega(n,h,L)} e^{\sum s_j \lambda_j} v \left(kh - h - \sum s_j \right) ds_1 \dots ds_n \\ &= \int_{\Omega(n,h,L)} \left\{ e^{\sum s_j \lambda_j} v \left(kh - \sum s_j \right) \right\} ds_1 \dots ds_n - \\ &- \int_{\Omega(n,h,L) + (0, \dots, 0, h)'} \left\{ e^{\sum s_j \lambda_j} v \left(kh - \sum s_j \right) \right\} ds_1 \dots ds_n = \\ &= \int_{\Omega(n,h,L) \setminus (\Omega(n,h,L) + (0, \dots, 0, h)')} \dots ds_1 \dots ds_n - \int_{(\Omega(n,h,L) + (0, \dots, 0, h))' \setminus \Omega(n,h,L)} \dots ds_1 \dots ds_n. \end{aligned}$$

Оба множества, по которым ведется интегрирование, имеют меру, не превосходящую h . Отсюда с учетом (43) следует (44), поскольку

$$H_k - H_{k-1} = H_k - e^{h\lambda_n} H_{k-1} + (e^{h\lambda_n} - 1)H_{k-1}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Регулятор (24 с.23), (37 с.25) при $L = 1/h$ делает замкнутую систему диссипативной и доставляет функционалу (27 с.23) субоптимальное значение $\bar{J}_c + \mathcal{O}(h)$.*

Доказательство. Из уравнения регулятора (37 с.25) следует, что $H_k = y_k$. Поэтому из неравенств (43), (44) следует, что $C_y \leq \bar{J}_c + C_v \mathcal{O}(h)$ и $C'_y \leq C_v \mathcal{O}(h)$. Применяя лемму 1 с.23, получаем необходимые оценки для \bar{C}_y и C_u . Теорема доказана.

Бесконечномерные модели.

Полугруппы.

Рассмотрим $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, $t \geq 0$. Это *полугруппа* класса C_0 , если

- (i). $T(0) = I$.
- (ii). $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) = T(t_2)T(t_1)$.
- (iii). $\|T(t)x - x\| \xrightarrow{t \rightarrow +0} 0$

Свойства:

Непрерывность справа. При любом t

$$T(t + \Delta)x - T(t)x = T(t)[T(\Delta)x - x] \xrightarrow[\Delta \rightarrow +0]{(iii)} 0.$$

Ограниченность. Фиксируем $L > 0$. Для произвольного $x \in X$ в силу (iii) найдется такое Δ , что $\|T(t)x\| \leq C$ при $t \in (0, \Delta]$. Представив $t \leq L$ в виде $k\Delta + r$, $k \leq L/\Delta$, $r < \Delta$, получаем

$$\|T(t)x\| \leq \|T(\Delta)^k T(r)x\| \leq \|T(\Delta)^k\| C < \infty \Rightarrow$$

$$\sup_{0 \leq t \leq L} \|T(t)x\| < \infty,$$

откуда по теореме Банаха-Штейнгауза

$$\sup_{0 \leq t \leq L} \|T(t)\| < M < \infty.$$

Непрерывность слева.

$$\begin{aligned} \|T(t)x - T(t - \Delta)x\| &= \|T(t - \Delta)[T(\Delta)x - x]\| \leq \\ &\leq M \|T(\Delta)x - x\| \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{} 0. \end{aligned}$$

Дифференцируемость (бесконечная на плотном в X множестве). Фиксируем $x \in X$, $t > 0$ и положим

$$y = \int_0^t T(\sigma)x d\sigma$$

(интеграл Римана). Тогда

$$\begin{aligned} T(\Delta)y - y &= \int_0^t [T(\sigma + \Delta)x - T(\sigma)x]d\sigma = \\ &= \int_{\Delta}^{t+\Delta} T(\sigma)xd\sigma - \int_0^t T(\sigma)xd\sigma = \\ &= \int_t^{t+\Delta} T(\sigma)xd\sigma - \int_0^{\Delta} T(\sigma)xd\sigma = \\ &= \int_0^{\Delta} T(\sigma)[T(t)x]d\sigma - \int_0^t T(\sigma)xd\sigma. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} T(\sigma)z d\sigma - z \right\| &= \left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} [T(\sigma)z - z] d\sigma \right\| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq \sigma \leq \Delta} \|T(\sigma)z - z\|, \end{aligned}$$

то, подставив $z = T(t)x$ и $z = x$, получаем

$$\frac{T(\Delta)y - y}{\Delta} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} T(t)x - x.$$

Определим генератор полугруппы A равенством

$$Ax = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{T(\Delta)x - x}{\Delta}$$

на D — множестве тех x , для которых предел существует. Так как

$$D \supset \left\{ \int_0^t T(\sigma)xd\sigma \right\} \Rightarrow D \supset \text{span} \left\{ \int_0^t T(\sigma)xd\sigma \right\},$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\sigma)xd\sigma = x,$$

то D плотно в X .

Экспоненциальный рост.

$$w(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \|T(t)\| \Rightarrow w(t_1 + t_2) \leq w(t_1) + w(t_2).$$

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t \geq 0} \frac{w(t)}{t} \geq -\infty.$$

ω_0 конечна: фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем $a > 0$:
 $w(a)/a \leq \omega_0 + \varepsilon$.

$$t = ka + r, \quad 0 \leq r \leq a \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{w(t)}{t} &= \frac{w(ka + r)}{(ka + r)} \leq \frac{kw(a)}{(ka + r)} + \frac{w(r)}{(ka + r)} \leq \\ &\leq \frac{w(a)}{(a + r/k)} + \frac{w(r)}{t} \leq \omega_0 + \varepsilon + \frac{w(r)}{t} \Rightarrow \\ \frac{w(t)}{t} &\leq \frac{\ln M_\varepsilon}{t} + \omega_0 + \varepsilon \Rightarrow \omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\|T(t)\| \leq M_\varepsilon e^{t(\omega_0 + \varepsilon)}}$$

$\omega_0 = -\infty$:

$$\forall N \exists a = a(N) : w(a)/a \leq -N \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{w(t)}{t} &\leq -N + \frac{\ln M_N}{t} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} \leq -N \Rightarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} &= -\infty. \end{aligned}$$

$$\boxed{\|T(t)\| \leq M_N e^{-Nt}}$$

Резольвента. При $\text{Re} \lambda > \omega_0$ рассмотрим

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{\lambda t} T(t)x dt.$$

Интеграл сходится в силу экспоненциальной оценки роста полугруппы, и потому же справедливо одно из двух неравенств

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{\text{Re} \lambda - \omega_0 - \varepsilon}, \quad \|R(\lambda)\| \leq \frac{M_N}{N + \text{Re} \lambda},$$

откуда $R(\lambda) \xrightarrow{\text{Re} \lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Докажем, что $R(\lambda)X = D$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$:

$$\begin{aligned} (T(\Delta) - I)R(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} [T(t + \Delta)x - T(t)x] dt = \\ &= \int_\Delta^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda\Delta} T(t)x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = \\ &= - \int_0^\Delta e^{-\lambda t} T(t)x dt + (e^{\lambda\Delta} - 1) \int_\Delta^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &\Rightarrow \\ \frac{(T(\Delta) - I)}{\Delta} R(\lambda)x &\xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} -x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Таким образом, $R(\lambda)X \subset D(A)$ и

$$\boxed{\lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = x.} \quad (45)$$

Если $x \in D(A)$, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(\Delta) - I}{\Delta} \right) R(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{T(t + \Delta)x - T(t)x}{\Delta} \right] dt, \\ \frac{T(t + \Delta)x - T(t)x}{\Delta} &= T(t) \left[\frac{T(\Delta)x - x}{\Delta} \right] \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} T(t)Ax, \\ \left\| \frac{T(t + \Delta)x - T(t)x}{\Delta} - T(t)Ax \right\| &= \\ = \left\| T(t) \left(\frac{T(\Delta)x - x}{\Delta} - Ax \right) \right\| &\leq \underbrace{\|(\dots)\|}_{\operatorname{const}(t) \rightarrow 0} \|T(t)\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[\frac{T(t + \Delta)x - T(t)x}{\Delta} \right] dt &\rightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = \\ &= R(\lambda)Ax. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{\begin{aligned} x \in D(A) &\Rightarrow AR(\lambda)x = R(\lambda)Ax, \\ \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)Ax &= x, \end{aligned}} \quad (46)$$

и $D(A) \subset R(\lambda)X$, откуда

$$\boxed{D(A) = R(\lambda)X}$$

Следствие: A — замкнутый оператор. Действительно, пусть $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$, $y_n = Ax_n \rightarrow y$, тогда $x_n = R(\lambda)(\lambda x_n - Ax_n) \Rightarrow x = R(\lambda)(\lambda x - y) \in D(A)$. Из (45) $x - \lambda R(\lambda)x = AR(\lambda)x$, поэтому

$$\begin{aligned} R(\lambda)y &= AR(\lambda)x = R(\lambda)Ax \Rightarrow \\ (y - Ax) &= 0 \Rightarrow y - Ax = 0, \end{aligned}$$

поскольку в силу (45) $0 \notin \sigma(R(\lambda))$: $R(\lambda)z = 0 \Rightarrow z = 0$.

Итак, показано, что $R(\lambda)$ — резольвента A , будем писать $R(\lambda, A)$. Свойства резольвенты:

$$\begin{aligned} \text{(i). } R(\lambda, A) &= \int_0^\infty e^{\lambda t} T(t) dt \text{ при } \operatorname{Re}\lambda > \omega_0, \\ \lim_{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A) &= x \quad \forall x \in X, \quad (47) \end{aligned}$$

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M < +\infty \quad (48)$$

при д.б. $\operatorname{Re}\lambda$.

(ii). $R(\lambda, A)D(A)$ плотно в $D(A)$ и в X .

Действительно,

$$y \in D(A) \Rightarrow y = R(\lambda, A)x, \quad x \in X \stackrel{D(A) \text{ плотно в } X}{\Rightarrow}$$

$$\exists \{x_n\} : D(A) \ni x_n \rightarrow x \Rightarrow R(\lambda, A)x_n \rightarrow y.$$

Аналогично $R(\lambda, A)^n X$ плотно в $X \forall n$. Следовательно, $D(A^n)$ плотно в $X \forall n$, поскольку $R(\lambda, A)^n X \subset D(A^n)$.

$$\text{(iii). } x \in D(A) \Rightarrow \lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x \xrightarrow{\operatorname{Re}\lambda \rightarrow \infty} Ax.$$

$$\text{(iv). } R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

$$\text{(v). } \|R(\lambda, A)^n\| \geq \frac{M(\omega)}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega > \omega_0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^n x &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\lambda(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n)} \times \\ &\times T(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n)x d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M_\varepsilon \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\{-\lambda(\sigma_1 + \dots + \sigma_n) +$$

$$+ \omega(\sigma_1 + \dots + \sigma_n)\} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_n =$$

$$= \frac{M_\varepsilon}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n},$$

где $\varepsilon = \omega - \omega_0$, M_ε не зависит от n .

Построение полугруппы по генератору.

Теорема о порождении полугруппы. Пусть A — замкнутый оператор, $D(A)$ плотно в X .

A — генератор полугруппы класса $C_0 \Leftrightarrow$
 $\operatorname{Re} \sigma(A) \leq \omega_0 < +\infty$ и

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M/(\lambda - \omega_0)^n \text{ при } \lambda > \omega_0, n = 1, 2, \dots \quad (49)$$

Доказательство. Необходимость уже доказана, доказываем достаточность. Рассматривая $A - \omega_0 I$ вместо A , сводим все к случаю $\omega_0 = 0$. Покажем, что

$$x \in D(A) \Rightarrow \lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} Ax.$$

В самом деле,

$$\|AR(\lambda, A)x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq M\|Ax\|/\lambda$$

при $x \in D(A)$, поэтому из равенства $\lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax = x$ следует, что

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Если $x \in D(A)$, то

$$\begin{aligned} \lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x &= \lambda[\lambda R(\lambda, A)x - x] = \\ &= \lambda R(\lambda, A)x \rightarrow x \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Рассмотрим полугруппу

$$S_\lambda(t) = e^{t\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{\lambda^{2n} R(\lambda, A)^n t^n}{n!}.$$

Ясно, что

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_0^\infty \frac{\lambda^{2n} \|R(\lambda, A)^n\| t^n}{n!} \leq M.$$

Обозначим $B(\lambda) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ и воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= \int_0^t [S_\lambda(s)S_\mu(t-s)]'_s ds = \\ &= \int_0^t S_\lambda(s)S_\mu(t-s)[B(\lambda)x - B(\mu)x] ds, \end{aligned}$$

откуда

$$\|S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x\| \leq M^2 t \|B(\lambda)x - B(\mu)x\|.$$

Эта оценка при $\lambda = \lambda_k$, $\mu = \lambda_m$, где $\lambda_n \rightarrow \infty$, в силу полноты банахового пространства X гарантирует равномерную сходимость $S_\lambda(t)x$ в $D(A)$ на любом компактном временном отрезке. Поскольку $D(A)$ плотно в X и $\|S_\lambda(t)\| \leq M$, то $S_\lambda(t)x$ для каждого $x \in X$ сходится равномерно на любом компактном временном отрезке. Обозначим

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t),$$

тогда в силу равномерной сходимости $T(t)$ — семейство ограниченных линейных операторов, образующих полугруппу класса C_0 , и $\|T(t)\| \leq M$. Обозначим через A' генератор $T(t)$ и покажем, что $A' = A$. Из ограниченности $T(t)$ при $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} R(\mu, A')x &= \int_0^\infty e^{-\mu t} T(t)x dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\mu t} S_\lambda(t)x dt = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\mu, B(\lambda))x. \end{aligned}$$

Переходя к пределу по λ в равенстве

$$\mu R(\mu, B(\lambda))x - R(\mu, B(\lambda))B(\lambda)x = x,$$

для $x \in D(A)$ получаем

$$\mu R(\mu, A')x - R(\mu, A')Ax = x.$$

Пусть $y \in X$, тогда $x = R(\mu, A)y \in D(A)$ и

$$\begin{aligned} R(\mu, A')(\mu R(\mu, A)y - AR(\mu, A)y) &= R(\mu, A)y \Leftrightarrow \\ R(\mu, A')y = R(\mu, A)y &\Rightarrow \boxed{D(A) = D(A')} \end{aligned}$$

Наконец,

$$\left. \begin{aligned} \mu R(\mu, A')x - AR(\mu, A')x &= x, \\ \mu R(\mu, A')x - A'R(\mu, A')x &= x \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(A - A')R(\mu, A')x = 0 \Rightarrow$$

$$Ax = A'x \quad \forall x \in D(A) = D(A').$$

Стабилизированность бесконечномерных объектов по состоянию.

Система

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx. \quad (50)$$

$X = \{x\}$ — банахово пространство, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^l$, $B \in \mathcal{L}(R^m \rightarrow X)$, $C \in \mathcal{L}(X \rightarrow R^m)$. A — генератор полугруппы $G(t)$ класса C_0 :

$$x(t) = G(t)x(0) + \int_0^t G(t-s)Bu(s)ds,$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Любая экспоненциально стабилизируемая по состоянию динамическая система (50) с конечномерным входом допускает спектральное разложение на экспоненциально устойчивую и конечномерную вполне управляемую подсистемы.

Спектральное разложение:

$$\exists \gamma < 0 : \sigma_u = \{\lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re} \lambda \geq \gamma\} -$$

ограниченное множество, отделимое от $\sigma(A) \setminus \sigma_u$ простым гладким замкнутым контуром Γ , при обходе которого σ_u остается слева. Проектор

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R(\lambda, A)d\lambda$$

разлагает пространство X на прямую сумму инвариантных относительно $G(t)$ подпространств $X' = \mathcal{P}X$ и $X'' = \ker \mathcal{P}$, причем спектр сужения A на X'' принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < \gamma$. Система (50) распадается на две:

$$\frac{dx'}{dt} = A'x' + B'u, \quad x' = \mathcal{P}x \in X', \quad y' = C'x', \quad (51)$$

$$\frac{dx''}{dt} = A''x'' + B''u, \quad (52)$$

$$x'' = (I - \mathcal{P})x \in X'', \quad y'' = C''x'',$$

$$y = y' + y''.$$

где A', A'', C', C'' — сужения A и C на X' и X'' соответственно, $B' = \mathcal{P}B$, $B'' = (I - \mathcal{P})B$.

Теорема Нефедова-Шолоховича. Для стабилизированности системы (50) необходимо и достаточно существование такого спектрального разложения оператора A , что подсистема (52) экспоненциально устойчива, а подсистема (51) конечномерна и управляема.

Конечномерность X' позволяет корректно определить характеристический определитель A' .

Не умаляя общности, будем считать, что все собственные числа A' лежат в замкнутой правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Этим условием обеспечивается единственность разложения системы (50) на подсистемы. Обозначим

$$W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B = W'(\lambda) + W''(\lambda),$$

$$W'(\lambda) = C'(\lambda I - A')^{-1}B',$$

$$W''(\lambda) = C''(\lambda I - A'')^{-1}B'',$$

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A').$$

Стабилизированность по выходу и невырожденность передаточных функций непрерывных объектов.

Определение. Динамическая система (50) стабилизируема по выходу $y(t)$, если существуют такое банахово пространство $Z = \{z\}$ и такие операторы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, что система уравнений (50) и

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}y, \quad u = \mathcal{C}z + \mathcal{D}y \quad (53)$$

экспоненциально устойчива. (Подразумевается, что \mathcal{A} порождает полугруппу класса C_0 на Z , поэтому решения однородной системы уравнений (50), (53) определяются однозначно).

Уравнение (53) будем называть уравнением обратной связи.

Определение. Динамическая система (50) невырождена в замкнутой правой полуплоскости, если для любого корня λ_0 многочлена $a(\lambda) = \det(\lambda I - A')$ существует такой минор $\mu(\lambda)$ матричной функции $W(\lambda)$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} a(\lambda)\mu(\lambda) \neq 0. \quad (54)$$

Теорема о стабилизации по выходу. Стабилизируемость динамической системы (50 с.31) по выходу эквивалентна ее невырожденности в замкнутой правой полуплоскости.

Лемма 1. Пусть в некоторой окрестности точки λ_0 скалярная функция $a(\lambda)$ и матричная функция $A(\lambda)$ аналитичны, а другая матричная функция $B(\lambda)$, имеющая ту же размерность, дробно-рациональна. Пусть

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} a(\lambda)\mu(\lambda) = 0, \quad (55)$$

где $\mu(\lambda)$ — любой минор $B(\lambda)$. Тогда (55) выполнено и для любого минора $B(\lambda) + A(\lambda)$.

Доказательство. Не умаляя общности, предполагаем нулями все элементы $A(\lambda)$, кроме $A_{i_0, j_0}(\lambda)$. Пусть $\mu_B(\lambda)$ — произвольный минор $B(\lambda)$, а $\mu_{A+B}(\lambda)$ — минор $B(\lambda) + A(\lambda)$, подсчитанный по тем же строкам и столбцам. Тогда либо $\mu_{A+B}(\lambda) = \mu_B(\lambda)$, либо

$$\mu_{A+B}(\lambda) = \mu_B(\lambda) + A_{i_0, j_0}(\lambda)\mu_{i_0, j_0, B}(\lambda), \quad (56)$$

где $\mu_{i_0, j_0, B}$ — минор $B(\lambda)$, порядок которого меньше порядка $\mu_B(\lambda)$. Из (56) следует (55) для $\mu(\lambda) = \mu_{A+B}(\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Динамическая система (50 с.31) невырождена в замкнутой правой полуплоскости тогда и только тогда, когда невырождена ее конечномерная подсистема (51 с.31).

Доказательство следует из леммы 1, поскольку функции $W(\lambda)$ и $W'(\lambda)$ отличаются на $W''(\lambda)$, которая в правой полуплоскости аналитична.

Доказательство теоремы о стабилизации по выходу. Покажем, что вырожденная в правой полуплоскости система (50 с.31) не может быть стабилизируемой. Действительно, по лемме 2 вырожденность (50 с.31) влечет вырожденность конечномерной подсистемы (51 с.31). По конечномерной теореме о невырожденности отсюда следует ненаблюдаемость конечномерной подсистемы (51 с.31). В силу соответствующего критерия наблюдаемости мы получаем, что у конечномерного оператора A' существует собственный вектор $x'_0 \in X'$, удовлетворяющий равенствам $A'x'_0 = \lambda_0 x'_0$, $C'x'_0 = 0$, причем $\text{Re } \lambda_0 \geq 0$. Фиксируем произвольную обратную связь (53 с.31). Пусть вектор начальных данных системы (50 с.31), (53 с.31) имеет вид $x_0 = (x'_0, 0)'$, $z_0 = 0$. Тогда решением

служат функции $x(t) = \text{col}(\exp(t\lambda_0)x'_0, 0)$, $u(t) \equiv y(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$. Таким образом, никакая обратная связь не обеспечивает асимптотической устойчивости, то есть система (50 с.31) не стабилизируема по выходу.

Покажем теперь, что для невырожденной в правой полуплоскости системы (50 с.31) можно построить обратную связь, обеспечивающую устойчивость замкнутой системы. Из невырожденности системы (50 с.31) в правой полуплоскости по лемме 2 следует, что конечномерная подсистема (51 с.31) невырождена, то есть управляема и наблюдаема. Предположим сначала, что измерению доступен конечномерный вектор x' . Тогда в силу управляемости подсистемы (51 с.31) найдется такая $N \times m$ -матрица L , что все собственные числа $N \times N$ -матрицы $A' + B'L$ лежат в открытой левой полуплоскости. Следовательно, система уравнений (51 с.31), (52 с.31) и

$$u = Lx' \quad (57)$$

экспоненциально устойчива. Действительно, из (57) следует экспоненциальная оценка для $x'(t)$ и $u(t)$, а из оценки для $u(t)$ вытекает оценка для $x''(t)$ в силу устойчивости оператора A'' в уравнении (52 с.31).

Таким образом, обратная связь (57) стабилизирует систему (50 с.31). В отличие от (53 с.31), однако, в правую часть уравнения (57) входит функция $x'(\cdot)$ вместо наблюдаемого выхода $y(\cdot)$. Чтобы привести уравнение (57) к виду (53 с.31), определим функцию $\tilde{y}(\cdot)$ из дифференциального уравнения

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A''\tilde{x} + B''u, \quad \tilde{y} = C''\tilde{x}$$

в банаховом пространстве X'' , и положим $\delta(t) = y''(t) - \tilde{y}(t)$. Очевидно, $|\delta(t)|$ убывает экспоненциально, поскольку $d[\tilde{x}(t) - x''(t)]/dt = A''[\tilde{x}(t) - x''(t)]$. Таким образом, $y'(t) = y(t) - y''(t) = y(t) - \tilde{y}(t) + \delta(t)$, $\delta(t) \rightarrow 0$, то есть значения $y'(t)$ нам известны с точностью до затухающего сигнала. Это дает возможность построить наблюдатель для $x'(t)$:

$$d\hat{x}/dt = A'\hat{x} + B'u + T(y - \tilde{y} - C'\hat{x}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(x' - \hat{x})/dt &= A'(x' - \hat{x}) + T(y' - \delta - C'\hat{x}) = \\ &= A'(x' - \hat{x}) + T(C'x' - \delta - C'\hat{x}) = \\ &= (A' + TC')(x' - \hat{x}) - T\delta. \end{aligned}$$

Поскольку пара $\{A', L'\}$ наблюдаема, найдется такая $N \times l$ -матрица T , что спектр $A' + TC'$ лежит в левой полуплоскости, и тогда $x'(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ экспоненциально. Поэтому для стабилизации системы мы можем подставить в (57 с.32) функцию $\hat{x}(t)$ вместо $x'(t)$, и устойчивость замкнутой системы не нарушится.

Окончательно, уравнения стабилизирующей обратной связи имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A' + B'L & -TC'' \\ B''L & A'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} y, \\ u &= L\hat{x}, \end{aligned}$$

что и требуется по определению 1. Теорема доказана.

Дискретизация, стабилизируемость и невырожденность.

Вернемся к декомпозиции рассматриваемых (то есть стабилизируемых по выходу) бесконечномерных систем на конечномерную невырожденную и бесконечномерную устойчивую подсистемы (51 с.31) и (52 с.31), и соответствующую декомпозицию формулы Коши:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= G'(t)x'(0) + \int_0^t G'(s)B'u(t-s)ds, \\ x''(t) &= G''(t)x''(0) + \int_0^t G''(s)B''u(t-s)ds, \\ y &= y' + y'', \quad y' = C'x', \quad y'' = C''x'', \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

В этих формулах $G'(t) = \mathcal{P}G(t)$ и $G''(t) = (I - \mathcal{P})G(t)$ — полугруппы, порождаемые операторами A' и A'' на соответствующих подпространствах, причем $G'(t) = \exp(tA')$ в силу конечномерности X' , а полугруппа $G''(t)$ имеет отрицательный тип:

$$\|G''(t)\| \leq \exp(\gamma t) \quad (59)$$

при всех достаточно больших t .

Пусть управление кусочно-постоянно с периодом h :

$$u(kh + \varepsilon) = u_k, \quad \varepsilon \in [0, h), \quad k = 0, 1, \dots \quad (60)$$

Обозначим $y_k = y(kh)$, $y'_k = y'(kh)$, $y''_k = y''(kh)$. Пусть, далее,

$$\begin{aligned} P &= G(h), \quad Q = \int_0^h G(s)Bds, \quad x_k = x(kh), \\ P' &= G'(h), \quad Q' = \int_0^h G'(s)B'ds, \quad x'_k = x'(kh), \\ P'' &= G''(h), \quad Q'' = \int_0^h G''(s)B''ds, \quad x''_k = x''(kh). \end{aligned}$$

Из (58) следует, что

$$x'_{k+1} = P'x'_k + Q'u_k, \quad y'_k = C'x'_k, \quad (61)$$

$$x''_{k+1} = P''x''_k + Q''u_k, \quad y''_k = C''x''_k, \quad y_k = y'_k + y''_k. \quad (62)$$

Уравнения (61),(62) можно рассматривать как дискретную по времени модель исходной динамической системы (50 с.31) в форме пространства состояний. Однако во многих случаях эта форма неудобна (например, в связи с тем, что бесконечномерный вектор состояния $x_k = \text{col}(x'_k, x''_k)$ недоступен для измерения). Покажем, каким образом значения x_k при $k > 0$ можно исключить из уравнения дискретной модели (61),(62), получив тем самым уравнение в форме "вход-выход".

Определим передаточные функции дискретной по времени динамической системы (61),(62):

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= C(I - \lambda P)^{-1}Q = \chi'(\lambda) + \chi''(\lambda), \\ \chi'(\lambda) &= C'(I - \lambda P')^{-1}Q', \quad \chi''(\lambda) = C''(I - \lambda P'')^{-1}Q''. \end{aligned} \quad (63)$$

Фиксируем также обозначение для характеристического многочлена конечномерной подсистемы (61): $\alpha(\lambda) = \det(I - \lambda Q')$. Для удобства записи разностных уравнений определим для произвольных последовательностей $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ оператор сдвига $q : qz_k = z_{k-1}$ при $k > 0$, $qz_0 = 0$. Естественным образом определяются положительные степени q , многочлены и ряды от q , причем вопрос о сходимости не возникает, поскольку $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q^i z_k = \sum_{i=0}^k \beta_i z_{k-i}$.

Теорема о дискретизации. При условии (60 с.33) любое решение уравнения (50 с.31) удовлетворяет разностному уравнению

$$\alpha(q)y_k = \beta(q)u_{k-1} + v_k x(0), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (64)$$

в котором

$$\alpha(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda^i = \det(I - \lambda P'),$$

$$\beta(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i = \alpha(\lambda) C (I - \lambda P)^{-1} Q$$

— аналитическая в единичном круге функция, v_k — непрерывные линейные функционалы, причем

$$|\beta_j| \leq r^j, \quad \|v_j\| \leq r^j \quad (65)$$

для некоторого $r \in (0, 1)$ при всех достаточно больших j .

З а м е ч а н и е 1. Эквивалентная форма записи разностного уравнения (64) — это

$$y_k = \sum_{j=1}^k \beta_j u_{k-j} - \sum_{j=1}^N \alpha_j y_{k-j} + v_k x(0), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $y_i = 0$ при $i < 0$. Эту формулу можно использовать для вычисления значений y_k . Пренебрегая последним слагаемым в правой части, мы получаем приближенную формулу, точность которой в силу (65) с ростом k растет экспоненциально. Очевидно, что при априорно ограниченных значениях u_k с тем же успехом можно пренебречь и коэффициентами β_j при всех достаточно больших j .

З а м е ч а н и е 2. Если имеет место часто выполненное на практике дополнительное условие полной непрерывности порождаемой оператором A полугруппы $G(t)$ при всех положительных t , то формулировка теоремы может быть усилена. В этом случае для произвольного $r \in (0, 1)$ существуют такие $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ и $\{v_k\}$, для которых выполнено уравнение (64) и при всех достаточно больших j справедливы неравенства (65).

Доказательство теоремы о дискретизации. Уравнение (61 с.33) — это обыкновенное разностное уравнение в конечномерном пространстве состояний, оно стандартным образом приводится к форме "вход-выход":

$$\alpha(q)y'_k = \beta'(q)u_{k-1}, \quad (66)$$

где $\alpha(\lambda) = \det(I - \lambda P')$, $\beta'(\lambda) = \alpha(\lambda)C'(I - \lambda P')^{-1}Q'$. Что касается уравнения (62 с.33), то оно может быть переписано в виде

$$y''_k = C''x''_k = C''P''^k x''_0 + \sum_{j=1}^k C''P''^{(j-1)}Q''u_{k-j},$$

откуда

$$\alpha(q)y''_k = \beta''(q)u_{k-1} + v_k x_0, \quad (67)$$

где

$$\beta''(\lambda) = \alpha(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} C''P''^j Q'' \lambda^j, \quad v_k x_0 = [\alpha(q)C''P''^k]x''_0.$$

Сложив равенства (66) и (67), получаем (64). Неравенства (65) справедливы по определению $\beta''(\lambda)$ и v_k , поскольку в силу (59 с.33) спектральный радиус P'' строго меньше $r = \exp(h\gamma) < 1$. Теорема доказана.

Определение 3. Динамическая система (64) конечномерно стабилизируема по выходу y_k , если существуют такие многочлены $\gamma(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$, что $\gamma(0) = 1$ и система разностных уравнений (64) и $\gamma(q)u_k = \delta(q)y_k$ асимптотически устойчива.

Определение 4. Динамическая система (64) невырождена в замкнутом единичном круге, если аналитические в области $|\lambda| < R$, $R > 1$ функции $\alpha(\lambda) = \det(I - \lambda P')$ и $\beta(\lambda) = \alpha(\lambda)\chi(\lambda)$ не имеют общих нулей при $|\lambda| \leq 1$.

Теорема о наследовании невырожденности и стабилизации. Пусть динамическая система (64) получена в результате дискретизации прототипа (50 с.31) с достаточно малым периодом h . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Система (50 с.31) невырождена в замкнутой правой полуплоскости.
2. Система (64) невырождена в замкнутом единичном круге.
3. Система (64) конечномерно стабилизируема по выходу.

З а м е ч а н и е. Обратная связь $\gamma(q)u_k = \delta(q)y_k$ обеспечивает устойчивость не только конечно стабилизируемой системы (64), но и ее непрерывного прототипа (50 с.31).

Лемма 3. *Динамическая система (64 с.34) невырождена в замкнутом единичном круге тогда и только тогда, когда невырождена ее конечномерная подсистема (61 с.33) (в скалярном случае — когда многочлены $\alpha(\lambda) = \det(I - \lambda P')$ и $\beta'(\lambda) = \alpha(\lambda)\chi'(\lambda)$ не имеют общих нулей).*

Доказательство повторяет доказательство леммы 2.

Доказательство теоремы. Убедимся сначала в равносильности условий 1 и 2 при любом достаточно малом значении h . Для конечномерных систем этот факт уже доказан — см. теорему о наследовании невырожденности. Этого вполне достаточно и в общем случае, поскольку в силу лемм 2 и 3 невырожденность бесконечномерных систем (50 с.31) и (64 с.34) (в правой полуплоскости и единичном круге соответственно) эквивалентна невырожденности их конечномерных подсистем (52 с.31) и (61 с.33), которые связаны друг с другом как непрерывный (по времени) прототип и его дискретная модель.

Вырожденная система не может быть стабилизирована никакой обратной связью. Это утверждение для непрерывной системы (50 с.31) составляет часть формулировки теоремы о стабилизации по выходу; для дискретной системы (64 с.34) в ее эквивалентном представлении (61 с.33), (62 с.33) оно доказывается аналогичным образом. Поэтому для завершения доказательства остается убедиться, что из невырожденности системы (64 с.34) следует ее конечномерная стабилизируемость.

Обозначим через λ_j корни многочлена $\alpha(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, N$. Для простоты изложения ограничимся скалярным случаем и предположим, что все λ_j различны, на самом деле это условие несущественно. Фиксируем устойчивый (не имеющий корней в замкнутом единичном круге) многочлен $\zeta(\lambda)$. Зададимся некоторым значением $M > 0$ и представим числитель передаточной функции $\chi(\lambda)$ в виде

$$\beta(\lambda) = \beta_M(\lambda) + \lambda^M \beta^M(\lambda),$$

где $\beta_M(\lambda)$ — многочлен степени M , а $\beta^M(\lambda)$ — аналитическая в единичном круге функция. При достаточно больших M многочлен $\beta_M(\lambda)$ не имеет в единичном круге общих корней с $\alpha(\lambda)$:

$$\alpha(\lambda) = 0, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \beta_M(\lambda) \neq 0.$$

Действительно, пусть Ω — окрестность некоторого λ_j , достаточно малая для того, чтобы в ней не было ни корней $\beta(\lambda)$, ни других корней $\alpha(\lambda)$. На ее границе

$$\sup |\beta^M(\lambda)| \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы Руше при достаточно большом M количество корней внутри Ω у функций $\beta_M(\lambda)$ и $\beta(\lambda) = \beta_M(\lambda) + \lambda^M \beta^M(\lambda)$ одинаковое, то есть нулевое.

Итак, пусть M больше степени $\zeta(\lambda)$ и достаточно велико для того, чтобы многочлен $\beta_M(\lambda)$ не имел в единичном круге общих корней с $\alpha(\lambda)$. Определим многочлены $\gamma_M(\lambda)$ и $\delta_M(\lambda)$ степеней $M-1$ и $N-1$ соответственно из диофантова уравнения

$$\alpha(\lambda)\gamma_M(\lambda) - \lambda\delta_M(\lambda)\beta_M(\lambda) = \zeta(\lambda).$$

В силу условия на корни $\alpha(\lambda)$ многочлен $\delta_M(\lambda)$ однозначно определяется равенствами

$$\delta_M(\lambda_j) = \lambda_j \zeta(\lambda_j) / \beta_M(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Из аналогичных равенств

$$\delta(\lambda_j) = \lambda_j \zeta(\lambda_j) / \beta(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

можно определить многочлен $\delta(\lambda)$ той же степени $N-1$, к коэффициентам которого стремятся коэффициенты $\delta_M(\lambda)$ при $M \rightarrow \infty$.

Пусть

$$\gamma_M(q)u_k = \delta_M(q)y_k. \quad (68)$$

Тогда в силу уравнения (64 с.34) мы имеем

$$\begin{aligned} \zeta(q)y_k &= [\alpha(q)\gamma_M(q) - \delta_M(q)\beta_M(q)]y_k = \\ &= \gamma_M(q)[\beta(q)u_k + v_k x_0] - \delta_M(q)\beta_M(q)y_k = \\ &= q^M \beta^M(q)\delta_M(q)y_k + \gamma_M(q)v_k x_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(q)u_k &= [\alpha(q)\gamma_M(q) - \delta_M(q)\beta_M(q)]u_k = \\ &= \alpha(q)\gamma_M(q)u_k - \delta_M(q)[\beta(q) - q^M \beta^M(q)]u_k = \\ &= q^M \beta^M(q)\delta_M(q)u_k - \delta_M(q)v_k x_0. \end{aligned}$$

На единичной окружности функции $\zeta(\lambda)$ и $\zeta(\lambda) - \lambda^M \beta^M(\lambda)\delta_M(\lambda)$ различаются сколь угодно мало,

поскольку $\delta_M(\lambda) \rightarrow \delta(\lambda)$ и $\beta^M(\lambda) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Вновь применив теорему Руше, убеждаемся в устойчивости замкнутой системы разностных уравнений (64 с.34), (68 с.35).

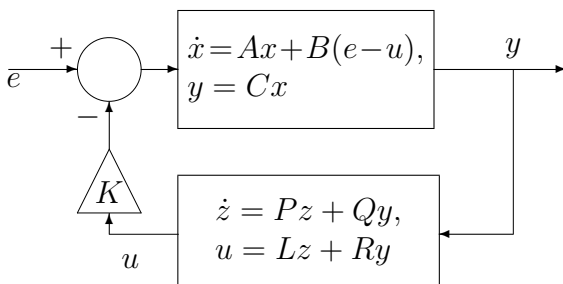
Нам осталось убедиться, что при достаточно малых h система уравнений (50 с.31), (60 с.33), (68 с.35) также является устойчивой. Воспользуемся равенствами (61 с.33), (62 с.33). Поскольку система (64 с.34), (68 с.35) устойчива, имеем $u_k \rightarrow 0$ и $y_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а также $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в силу (60 с.33). Следовательно, $y_k'' \rightarrow 0$ и $x''(t) \rightarrow 0$, поскольку $W''(\lambda)$ и $\chi''(\lambda)$ — передаточные функции устойчивых бесконечномерных систем. Поскольку $W'(\lambda)$ — передаточная функция конечномерной системы (52 с.31), то из стремления к нулю u_k и $y_k' = y'(kh) = y_k - y_k''$ следует, что $x'(t) \rightarrow 0$ (почему?). Таким образом, теорема доказана полностью.

Два замечания к теоремам об устойчивости и невырожденности:

1. Множество стабилизируемых по выходу систем инвариантно относительно обратных связей.
2. Стабилизируемая по выходу (\Leftrightarrow невырожденная в неустойчивой области) система устойчива в том и только в том случае, когда у ее передаточной функции нет особенностей в неустойчивой области.

Small gain theorem.

Рассмотрим каноническую устойчивую систему (для определенности — непрерывную), замкнутую устойчивой обратной связью:



Если коэффициент K достаточно мал, то замкнутая система устойчива.

Определим передаточные функции:

$$\Phi(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}B, \quad M = L(\lambda I - P)^{-1}Q + R.$$

Теорема о малом коэффициенте. Обратная связь из двух устойчивых подсистем устойчива в том и только в том случае, если

$$\inf_{\operatorname{Re}\lambda > 0} |1 + K\Phi(\lambda)M(\lambda)| > 0. \quad (69)$$

Доказательство. Выпишем передаточную функцию от e к y :

$$\left. \begin{aligned} y &= \Phi(\lambda)(e - u), \\ u &= KM(\lambda)y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ [1 + K\Phi(\lambda)M(\lambda)]y &= \Phi(\lambda)e \Rightarrow \\ y &= W(\lambda)e, \text{ где} \\ W(\lambda) &= [1 + K\Phi(\lambda)M(\lambda)]^{-1}\Phi(\lambda).$$

Неравенство (69) эквивалентно отсутствию особенностей у $W(\lambda)$ в правой полуплоскости. С учетом замечаний 1-2 это эквивалентно устойчивости. Теорема доказана.

Векторный вариант:

$$\inf_{\operatorname{Re}\lambda > 0} |\det[I + K\Phi(\lambda)M(\lambda)]| > 0.$$

При дополнительном условии разрешимости объект управления и/или обратная связь могут быть и нелинейными:

$$K\|\Phi\| \cdot \|M\| < 1,$$

где Φ и M уже не передаточные функции, а просто устойчивые динамические системы, то есть операторы из $\{x_0\} \times \{u(\cdot)\}$ в множество $\{y(\cdot)\}$ и из $\{z_0\} \times \{y(\cdot)\}$ в множество $\{u(\cdot)\}$ соответственно, а норма определяется естественным образом. Доказательство — через срезки (сужения) входов на конечные временные интервалы.

Уравновешенные реализации и уменьшение размерности канонических моделей.

Будем рассматривать только конечномерные линейные стационарные системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

Введем для передаточной функции обозначение

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \stackrel{\text{def}}{=} C(\lambda I - A)^{-1}B + D.$$

Уравнение Ляпунова:

$$A^*X + XA + Q = 0. \quad (70)$$

Лемма Ляпунова. Пусть A — устойчивая матрица, тогда

$$(i). \quad X = \int_0^\infty e^{A^*t} Q e^{At} dt.$$

$$(ii). \quad X > 0 \text{ при } Q > 0 \text{ и } X \geq 0 \text{ при } Q \geq 0.$$

$$(iii). \quad \text{Если } Q \geq 0, \text{ то наблюдаемость } \{A, Q\} \Leftrightarrow X > 0.$$

И наоборот, если X — решение (70), то

$$(iv). \quad \text{Re} \lambda_j(A) \leq 0 \text{ при } X > 0 \text{ и } Q \geq 0.$$

$$(v). \quad \text{Re} \lambda_j(A) < 0 \text{ при } X > 0 \text{ и } Q > 0.$$

$$(vi). \quad \text{Re} \lambda_j(A) < 0 \text{ при } X \geq 0 \text{ и } Q \geq 0, \text{ если пара } \{A, Q\} \text{ детектируема.}$$

Следствие: Пара $\{A, Q\}$ наблюдаема \Leftrightarrow решение уравнения

$$A^*L_o + L_oA + C^*C = 0$$

положительно определено. Это решение называется *грамианом наблюдаемости*. Аналогично, пара $\{A, Q\}$ управляема \Leftrightarrow решение уравнения

$$AL_c + L_cA^* + BB^* = 0$$

положительно определено, и L_c — *грамиан управляемости*.

Лемма 1. Пусть $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$, а симметрическая матрица

$$P = P^* = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

с неособым блоком P_1 удовлетворяет уравнению

$$AP + PA^* + BB^* = 0.$$

Разобьем матрицы (A, B, C, D) в соответствии со структурой P :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right].$$

Тогда $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$, а пара $\{A_{11}, B_1\}$ управляемая, если матрица A_{11} устойчива.

Доказательство: С учетом разбиения матриц (A, B, C, D) получаем

$$0 = AP + PA^* + BB^* = \begin{bmatrix} A_{11}P_1 + P_1A_{11}^* + B_1B_1^* & P_1A_{21}^* + B_1B_2^* \\ A_{21}P_1 + B_2B_1^* & B_2B_2^* \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$B_2 = 0 \Rightarrow A_{21} = 0,$$

поскольку P_1 — неособая матрица. Т.о.,

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right].$$

Если A_{11} — устойчивая матрица, то управляемость $\{A_{11}, B_1\}$ следует из леммы Ляпунова. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 2. Пусть $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$, а симметрическая матрица

$$Q = Q^* = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

с неособым блоком Q_1 удовлетворяет уравнению

$$QA + A^*Q + C^*C = 0.$$

Разобьем матрицы (A, B, C, D) в соответствии со структурой Q :

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right].$$

Тогда $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$, а пара $\{A_{11}, C_1\}$ наблюдаемая, если матрица A_{11} устойчива.

Сформулированные леммы позволяют получить минимальную реализацию устойчивой модели, отбрасывая те компоненты вектора состояния, которые соответствуют нулевым диагональным блокам грамиана управляемости P и грамиана наблюдаемости Q . Что делать, если грамианы не имеют диагонального вида?

Теорема об одновременном приведении. Пусть $P = P^* \geq 0$ и $Q = Q^* \geq 0$. Тогда для некоторой невырожденной матрицы T справедливы равенства

$$\begin{aligned} TPT^* &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & \\ & \Sigma_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \\ (T^{-1})^*QT^{-1} &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \Sigma_3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (71)$$

где $\Sigma_i \geq 0$ — диагональные матрицы.

Доказательство. Поскольку $P = P^* \geq 0$, найдется такое преобразование T_1 , что

$$T_1PT_1^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$(T^{-1})^*QT^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^* & Q_{22} \end{bmatrix},$$

тогда для некоторой унитарной матрицы U_1 справедливо равенство

$$U_1Q_{11}U_1^* = \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 > 0.$$

Определим T_2 равенством

$$(T_2^*)^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} (T_2^*)^{-1}(T_1^*)^{-1}QT_1^{-1}T_2^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 & \hat{Q}_{121} \\ 0 & 0 & \hat{Q}_{122} \\ \hat{Q}_{121}^* & \hat{Q}_{122}^* & Q_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

причем из $Q \geq 0$ следует, что $\hat{Q}_{122} = 0$. Определим T_3 из равенства

$$(T_3^*)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\hat{Q}_{121}^*\Sigma_1^{-2} & 0 & I \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} (T_3^*)^{-1}(T_2^*)^{-1}(T_1^*)^{-1}QT_1^{-1}T_2^{-1}(T_3)^{-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} - \hat{Q}_{121}^*\Sigma_1^2\hat{Q}_{121} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь отыщем такую унитарную матрицу U_2 , что

$$U_2(Q_{22} - \hat{Q}_{121}^*\Sigma_1^2\hat{Q}_{121})U_2^* = \begin{bmatrix} \Sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 > 0.$$

Определим T_4 из равенства

$$(T_4^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{bmatrix}$$

и положим

$$T = T_4T_3T_2T_1,$$

тогда (71) будет справедливо при $\Sigma_2 = I$.

Следствие 1. Произведение двух положительно полуопределенных матриц подобно положительно полуопределенной матрице.

Доказательство. Для построенного выше преобразования T справедливо

$$TPQT^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следствие 2. Для любой устойчивой системы с передаточной функцией $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ существует такое неособое преобразование T , что преобразованная система с той же передаточной функцией $G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right]$ имеет грамиан управляемости

$$P = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & \\ & \Sigma_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

и грамиан наблюдаемости

$$Q = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \Sigma_2 & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

где Σ_{1-3} — диагональные положительно определенные матрицы.

В том специальном случае, когда реализация $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ уже минимальна, уравновешенная реализация может быть получена по упрощенной процедуре:

1. Вычислить грамианы управляемости и наблюдаемости $P > 0$, $Q > 0$.
2. Отискать такую матрицу R , что $P = R^*R$.
3. Привести RQR^* к диагональной форме $RQR^* = U\Sigma^2U^*$.
4. Положить $T^{-1} = R^*U\Sigma^{-1/2}$, тогда

$$TPT^* = (T^*)^{-1}QT^{-1} = \Sigma$$

и $\begin{bmatrix} TAT^{-1} & TB \\ CT^{-1} & D \end{bmatrix}$ — уравновешенное представление системы.

Кронекеровские произведение и сумма. Уравнение Сильвестра.

Если $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, то

$$A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq}$$

(кронекеровское произведение), и

$$A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) \in \mathbb{C}^{nm \times nm}$$

(кронекеровская сумма) при $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Для матрицы $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ со столбцами $x_i \in \mathbb{C}^m$ введем обозначение

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

тогда для произвольных матриц $A \in \mathbb{C}^{k \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times l}$ и $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ справедливо равенство

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(X),$$

а при $k = m$ и $l = n$ — равенство

$$\text{vec}(AX + XB) = (B^T \oplus A)\text{vec}(X).$$

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, и $\{\lambda_i\} = \sigma(A)$, $\{\mu_j\} = \sigma(B)$. Тогда

- $\sigma(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j\}$,
- $\sigma(A \oplus B) = \{\lambda_i + \mu_j\}$,
- собственным числам $\lambda_i \mu_j$ и $\lambda_i + \mu_j$ соответствуют собственные векторы $x_i \otimes y_j$, где $Ax_i = \lambda_i x_i$, $By_j = \mu_j y_j$.

Лемма об уравнении Сильвестра

$$AX + XB = C, \quad (72)$$

где $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{F}^{n \times m}$ — заданные матрицы, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Единственное решение $X \in \mathbb{F}^{n \times m}$ существует в том и только в том случае, если $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \forall i, j$.

В частности, для уравнения Ляпунова (случай $B = A^*$) условие разрешимости — неравенства $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0 \forall i, j$.

Доказательство. Уравнение (72) можно переписать в виде

$$(B^T \oplus A)\text{vec}(X) = \text{vec}(C),$$

поэтому однозначная разрешимость эквивалентна неравенству $0 \neq \lambda_i(A) + \lambda_j(B^T) = \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$.

Редукция (уменьшение размерности) модели посредством усечения сбалансированной реализации.

Рассмотрим устойчивую сбалансированную систему

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

с диагональным грамианом Σ :

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0, \quad (73)$$

$$A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0. \quad (74)$$

Представим грамиан в виде $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$ и соответственно разобьем систему:

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right].$$

Теперь уравнения для грамианов (73 с.39) и (74 с.39) можно переписать в виде

$$A_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}^* + B_1 B_1^* = 0, \quad (75)$$

$$\Sigma_1 A_{11} + A_{11}^* \Sigma_1 + C_1^* C_1 = 0, \quad (76)$$

$$A_{21}\Sigma_1 + \Sigma_2 A_{12}^* + B_2 B_1^* = 0, \quad (77)$$

$$\Sigma_2 A_{21} + A_{12}^* \Sigma_1 + C_2^* C_1 = 0, \quad (78)$$

$$A_{22}\Sigma_2 + \Sigma_2 A_{22}^* + B_2 B_2^* = 0, \quad (79)$$

$$\Sigma_2 A_{22} + A_{22}^* \Sigma_2 + C_2^* C_2 = 0. \quad (80)$$

Теорема об устойчивости подсистем. Если матрицы Σ_1 и Σ_2 не имеют общих диагональных элементов, то обе подсистемы (A_{11}, B_1, C_1) и (A_{22}, B_2, C_2) асимптотически устойчивы.

Доказательство. Достаточно рассмотреть (A_{11}, B_1, C_1) . Используя леммы 1,2 о грамианах, без потери общности можно считать, что $\Sigma_1 > 0$. По лемме Ляпунова отсюда следует, что $\lambda_i(A_{11}) \leq 0$. Предположим, что имеется собственное число $i\omega$ на мнимой оси. Пусть матрица V составлена из векторов базиса $\text{Ker}(A_{11} - i\omega I)$. Тогда

$$(A_{11} - i\omega I)V = 0, \quad (81)$$

откуда

$$V^*(A_{11}^* + i\omega I) = 0.$$

Уравнения (75),(76) можно переписать как

$$(A_{11} - i\omega I)\Sigma_1 + \Sigma_1(A_{11}^* + i\omega I) + B_1 B_1^* = 0, \quad (82)$$

$$\Sigma_1(A_{11} - i\omega I) + (A_{11}^* + i\omega I)\Sigma_1 + C_1^* C_1 = 0. \quad (83)$$

Домножив (83) на V справа и на V^* слева дает $V^* C_1^* C_1 V = 0$, то есть

$$C_1 V = 0.$$

Если теперь умножить (83) только на V справа, то мы получим

$$(A_{11}^* + i\omega I)\Sigma_1 V = 0.$$

Аналогично, домножив сперва (82) на $\Sigma_1 V$ справа и на $V^* \Sigma_1$ слева, получаем

$$B_1^* \Sigma_1 V = 0.$$

Затем, домножив (82) справа на $\Sigma_1 V$, получаем

$$(A_{11} - i\omega I)\Sigma_1^2 V = 0.$$

Следовательно, столбцы $\Sigma_1^2 V$ лежат в $\text{Ker}(A_{11} - i\omega I)$. Таким образом, существует такая матрица $\bar{\Sigma}_1$, что

$$\Sigma_1^2 V = V \bar{\Sigma}_1^2.$$

Поскольку $\bar{\Sigma}_1^2$ — это сужение Σ_1^2 на пространство, натянутое на столбцы V , то можно так выбрать V , что $\bar{\Sigma}_1^2$ — диагональная матрица. Значит, можно также и $\bar{\Sigma}_1$ выбрать диагональной и так, чтобы диагональные элементы $\bar{\Sigma}_1$ были подмножеством диагональных элементов Σ_1 .

Домножим (77) справа на $\Sigma_1 V$ и (78) справа на V , получим

$$A_{21}\Sigma_1^2 V + \Sigma_2 A_{12}^* \Sigma_1 V = 0,$$

$$\Sigma_2 A_{21} V + A_{12}^* \Sigma_1 V = 0,$$

откуда

$$(A_{21} V) \bar{\Sigma}_1^2 = \Sigma_2^2 (A_{21} V).$$

Это — уравнение Сильвестра относительно $(A_{21} V)$. Поскольку $\bar{\Sigma}_1^2$ и Σ_2^2 не имеют общих диагональных элементов, по лемме об уравнении Сильвестра

$$A_{21} V = 0 \quad (84)$$

— его единственное решение. Теперь из (84) и (81) следует, что

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix},$$

то есть у исходной матрицы A нашлось чисто мнимое собственное число — противоречие, теорема доказана.

Следствие. Если все сингулярные числа Σ различны, то любая подсистема асимптотически устойчива.

Замечание. Условия теоремы — только достаточные, но не необходимые.

Теорема о редукции. Пусть передаточная функция системы $G(s)$ дробно рациональна, вещественна, ограничена и аналитична в правой полуплоскости, причем

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right].$$

— уравновешенная реализация с грамианом $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$,

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \dots, \sigma_r I_{s_r}),$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N I_{s_N}),$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \dots > \sigma_N,$$

где s_i — кратности σ_i , $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$. Тогда усеченная система

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

сбалансирована и асимптотически устойчива, причем

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_N)$$

и равенство достигается при $r = N - 1$, то есть $\|G(s) - G_{N-1}(s)\|_\infty = 2\sigma_N$.

Доказательство. Асимптотическая устойчивость G_r следует из предыдущей теоремы. Докажем оценку для погрешности, предположив для простоты, что все кратности s_i равны единице и $N = n$. Положим

$$\phi(s) = (sI - A_{11})^{-1},$$

$$\psi(s) = sI - A_{22} - A_{21}\phi(s)A_{12},$$

$$\tilde{B}(s) = A_{21}\phi(s)B_1 + B_2,$$

$$\tilde{C}(s) = C_1\phi(s)A_{12} + C_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} G(s) - G_r(s) &= C(sI - A_{11})^{-1}B - C_1\phi(s)B_1 = \\ &= [C_1 \ C_2] \left[\begin{array}{cc|c} sI - A_{11} & -A_{12} & \\ -A_{21} & sI - A_{22} & \\ \hline & & B_1 \\ & & B_2 \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} - \\ &- C_1\phi(s)B_1 = \tilde{C}(s)\psi^{-1}(s)\tilde{B}(s), \end{aligned}$$

и на мнимой оси для максимального сингулярного числа $\bar{\sigma}(\dots)$ с учетом равенств (75 с.40)-(80 с.40) справедливо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[G(s) - G_r(s)] &= \\ &= \lambda_{\max}^{1/2} \left[\psi^{-1}(i\omega)\tilde{B}(i\omega)\tilde{B}^*(i\omega)\psi^{-*}(i\omega)\tilde{C}^*(i\omega)\tilde{C}(i\omega) \right], \end{aligned} \quad (85)$$

где $z^{-*} = (z^{-1})^*$.

По определению $\tilde{B}(s)$ из поблочных уравнений для грамиана (75 с.40)-(77 с.40) получаем

$$\tilde{B}(i\omega)\tilde{B}^*(i\omega) = \psi(i\omega)\Sigma_2 + \Sigma_2\psi^*(i\omega).$$

Аналогично

$$\tilde{C}^*(i\omega)\tilde{C}(i\omega) = \Sigma_2\psi(i\omega) + \psi^*(i\omega)\Sigma_2.$$

Подставив эти выражения в (85), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}[G(s) - G_r(s)] &= \lambda_{\max}^{1/2} \left\{ [\Sigma_2 + \psi^{-1}(i\omega)\Sigma_2\psi^*(i\omega)] \times \right. \\ &\quad \left. \times [\Sigma_2 + \psi^{-*}(i\omega)\Sigma_2\psi(i\omega)] \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь редукцию на один шаг, то есть пусть $r = n - 1$. В этом случае $\Sigma_2 = \sigma_n$ и

$$\bar{\sigma}[G(s) - G_r(s)] = \sigma_n \lambda_{\max}^{1/2} \{ [1 + \Theta^{-1}(i\omega)][1 + \Theta(i\omega)] \}, \quad (86)$$

где $\Theta = \psi^{-*}(i\omega)\psi(i\omega) = \Theta^{-*}$ — "все пропускающая" скалярная функция, то есть $|\Theta(i\omega)| \equiv 1$ (именно в этом месте используется предположение, что $s_i = 1$). Из (86) следует

$$\bar{\sigma}[G(s) - G_r(s)] \leq \sigma_n [1 + |\Theta(i\omega)|] = 2\sigma_n, \quad (87)$$

и для случая $r = n - 1$ доказательство завершено.

Оставшаяся часть доказательства заключается в последовательном использовании редукции порядка на единицу с учетом того, что полученная на k -м шаге редуцированная система $G_k(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$ уравновешена с грамианом

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k).$$

Пусть $E_k(s) = G_{k+1}(s) - G_k(s)$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$, где $G_N(s) = G(s)$. Тогда

$$\bar{\sigma}[E_k(i\omega)] \leq 2\sigma_{k+1},$$

поскольку $G_k(s)$ — результат редукции уравновешенной реализации $G_{k+1}(s)$ на единицу и справедливо неравенство (87).

Заметим, что

$$G(s) - G_r(s) = \sum_{k=r}^{N-1} E_k(s),$$

поэтому

$$\bar{\sigma}[G(i\omega) - G_r(i\omega)] \leq \sum_{k=r}^{N-1} \bar{\sigma}[E_k(i\omega)] \leq 2 \sum_{k=r}^{N-1} \sigma_{k+1}.$$

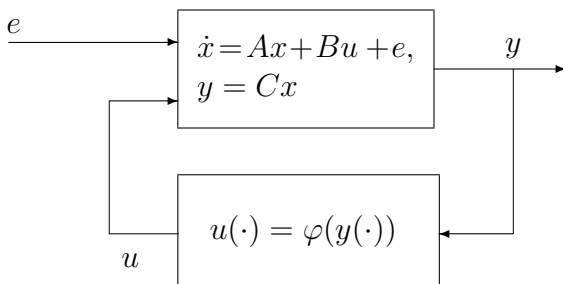
Искомая оценка получена.

Чтобы убедиться в неулучшаемости оценки при $r = N - 1$, заметим, что $\Theta(0) = I$. Поэтому правая часть (86 с.41) равна $2\sigma_N$ при $\omega = 0$. Теорема доказана.

Нелинейные системы.

Круговой критерий.

Вернемся к теореме о малом коэффициенте в предположении, что объект управления линеен и экспоненциально устойчив, а обратная связь — тоже устойчива и нелинейна:



Как понимать устойчивость? Вспоминая определения, получаем, что система (подсистема) будет устойчива (на самом деле — *абсолютно устойчива*), если она имеет конечный коэффициент усиления (gain), определяемый как норма динамического оператора системы. Вычислим сначала коэффициент усиления линейной подсистемы \mathcal{A} с передаточной функцией

$$\Phi(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$$

в предположении, что $x(0) = 0$. Пусть пара функций $\{u(\cdot), y(\cdot)\}$ — решение системы с начальными данными $x_0 = 0$ и нулевым входом $e(\cot)$, тогда

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|u(\cdot)\| \neq 0} \frac{\|y(\cdot)\|}{\|u(\cdot)\|},$$

Вопрос в том, как выбрать нормы для функций $u(\cdot)$ и $y(\cdot)$. Пусть

$$\|z(\cdot)\|^2 = \int_0^\infty |z(t)|^2 dt.$$

Тогда

$$\|\mathcal{A}\|_u = \sup_\omega |C(i\omega I - A)^{-1}|.$$

Действительно, по формуле Коши

$$y(t) = \int_0^t CG(s)Bu(t-s) ds,$$

где $G(t)$ — порождаемая A полугруппа. По теореме Парсеваля

$$\begin{aligned} \|y(\cdot)\|^2 &= \|\tilde{y}(\cdot)\|^2 = \int_{-\infty}^\infty |\Phi(i\omega)\tilde{u}(\cdot)|^2 d\omega \leq \\ &\leq \sup_\omega \|\Phi(i\omega)\|^2 \int_{-\infty}^\infty |\tilde{u}(\cdot)|^2 d\omega = \\ &= \sup_\omega \|\Phi(i\omega)\|^2 \|u(\cdot)\|^2 \Rightarrow \\ \|\mathcal{A}\|_u &\leq \sup_\omega \|\Phi(i\omega)\|. \end{aligned}$$

Чтобы обосновать равенство, достаточно взять произвольное $\epsilon > 0$ и определить такие $\omega(\epsilon)$ и $\delta(\epsilon) > 0$, что $|\Phi(\delta(\epsilon) + i\omega(\epsilon))| > \sup_\omega |\Phi(i\omega)| - \epsilon$. Рассмотрим функции вида

$$u(t) = e^{t[-\delta(\epsilon) + i\omega(\epsilon)]}$$

и уменьшая значение ϵ , можно сколь угодно точно приблизить $\|y(\cdot)\|/\|u(\cdot)\|$ к $\sup_\omega |\Phi(i\omega)|$.

Рассмотрим теперь нелинейную подсистему. Эффективно оценить коэффициент усиления можно, например, для *статической* нелинейности $u(t) = \varphi(y(t))$. Если $|\varphi(z)| \leq K|z|$, то K — оценка сверху для коэффициента усиления.

"Полулинейная" теорема о малом коэффициенте. Если

$$K \sup_\omega \|\Phi(i\omega)\| < 1, \quad (88)$$

то замкнутая система устойчива.

Доказательство. Пусть $\{e(\cdot), x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)\}$ — процесс (решение) замкнутой системы, $e(\cdot) \in L_2$. Рассмотрим функции

$$e_T(t) = \begin{cases} e(t), & \text{если } t \leq T, \\ 0, & \text{если } t > T, \end{cases}$$

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \leq T, \\ 0, & \text{если } t > T, \end{cases}$$

и определим функции $\{x_T(\cdot), y_T(\cdot)\}$ из уравнений системы:

$$\dot{x}_T = Ax_T + Bu_T + e_T, \quad y_T = Cx_T.$$

Разобьем функцию $y_T(\cdot)$ на два слагаемых: $y_T(\cdot) = y_T^0(\cdot) + y_T^e(\cdot)$, обозначив через $y_T^0(\cdot)$ функцию $y_T(\cdot)$, соответствующую нулевым начальным данным и нулевому входу $e(\cdot)$. Очевидно, $y_T(\cdot) \in L_2$, $y_T^e(\cdot) \in L_2$, $y_T(t) = y(t)$ при $t \leq T$ и

$$\begin{aligned} \int_0^T |y(t)|^2 dt &\leq \|y_T(\cdot)\|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|y_T^e(\cdot)\|^2 + \\ &+ (1 + \epsilon) \|y_T^0(\cdot)\|^2 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|y_T^e(\cdot)\|^2 + (1 + \epsilon) \|A\|^2 \|u_T(\cdot)\|^2 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|y_T^e(\cdot)\|^2 + \\ &+ (1 + \epsilon) \sup_{\omega} \|\Phi(i\omega)\|^2 K^2 \int_0^T |y(t)|^2 dt \end{aligned}$$

для произвольного $\epsilon > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left[1 - (1 + \epsilon) \sup_{\omega} \|\Phi(i\omega)\|^2 K^2\right] \int_0^T |y(t)|^2 dt &\leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \|y_T^e(\cdot)\|^2. \end{aligned}$$

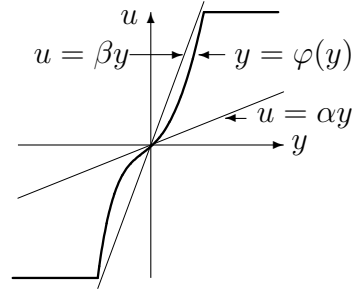
При достаточно малом ϵ в силу (88 с.42) из полученного неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int_0^T |y(t)|^2 dt &\leq \\ &\leq \frac{1 + 1/\epsilon}{1 - (1 + \epsilon) \sup_{\omega} \|\Phi(i\omega)\|^2 K^2} \|y_T^e(\cdot)\|^2. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получаем $y(\cdot) \in L_2$. Следовательно, $u(\cdot) \in L_2$ и $x(\cdot) \in L_2$; теорема доказана.

Бывает, что свойства нелинейности удается учесть и поточнее. Пусть, например, $m = l = 1$

и график нелинейности лежит между прямыми $u = \alpha y$ и $u = \beta y$:



то есть

$$\alpha \leq \varphi(y)/y \leq \beta, \quad (89)$$

Тогда $K = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. С другой стороны, уравнения системы можно переписать:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + e = \\ &= (A - kBC)x + Bw + e, \quad y = Cx, \quad (90) \\ w &= \psi(y), \end{aligned}$$

где $\psi(y) = \varphi(y) - ky$, $k = (\alpha + \beta)/2$. Новая нелинейность $w = \psi(y)$ имеет уже меньший коэффициент усиления $K = |\beta - \alpha|/2$. Применив теорему о малом коэффициенте, получаем круговой критерий:

Теорема (круговой критерий). Пусть спектр оператора $A - BkC$ устойчив (лежит в левой полуплоскости и отделен от мнимой оси). Тогда для устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы выполнялось частотное неравенство

$$\left| \frac{1}{\Phi(i\omega)} + k \right| > K \quad \forall \omega \in (-\infty, \infty). \quad (91)$$

Замечание 1. Неравенство (89) — это все, что мы знаем о нелинейности. Этому неравенству удовлетворяет обратная связь $u = -ky$. Поэтому условие устойчивости $A - BkC$ — необходимое. Его называют условием минимальной устойчивости.

Замечание 2. Неравенство (91) означает, что все точки кривой $z(\omega) = 1/\Phi(i\omega)$ лежат вне круга с центром в $(-k, 0)$ и радиусом K . Это эквивалентно тому, что годограф Найквиста $\Phi(i\omega) = 1/z(\omega)$ лежит вне круга с вещественным центром, граница которого проходит через точки $(-1/\beta, 0)$ и $(-1/\alpha, 0)$. Этим объясняется название

утверждения. Для сравнения: критерий Найквиста требует, чтобы годограф не пересекал отрезка $[-1/\beta, -1/\alpha]$ на вещественной оси.

Доказательство кругового критерия. В силу второго резольвентного тождества

$$\begin{aligned} & (\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A + BkC)^{-1} = \\ & = (\lambda I - A)^{-1} BkC(\lambda I - A + BkC)^{-1} \Rightarrow \\ & [C(\lambda I - A + BkC)^{-1} B]^{-1} - [C(\lambda I - A)^{-1} B]^{-1} = k. \end{aligned}$$

Применив теорему о малом коэффициенте к системе (90 с.43), получаем устойчивость. Теорема доказана.

Из доказательства ясно, как обобщить круговой критерий на случай векторных u и y .

Постановка задач управления для нелинейных систем.

В зависимости от цели управления различаются следующие постановки задач: стабилизация, отслеживание, подавление возмущений и разнообразные комбинации. Для каждой цели можно ставить задачу построения обратной связи от вектора состояния либо от измеряемого выхода. Часто встречаются дополнительные ограничения на управляющее воздействие и переходные процессы, которые могут конфликтовать между собой и с целью управления. Стремление преодолеть это противоречие наилучшим образом (в каком-то смысле) приводит к разнообразным задачам оптимизации. Если учитывается неопределенность модели процессов управления, то в ход идет понятие чувствительности. Чтобы построить обратную связь, работоспособную в широком классе неопределенностей модели, используют робастный либо адаптивный подходы, а также их комбинации.

Начнем с задачи стабилизации системы

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

посредством обратной связи

$$u = \gamma(t, x)$$

с целью обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x))$$

в точке равновесия $x = 0$. Умея решать эту задачу, мы сможем стабилизировать решения замкнутой системы около произвольной точки p , переводя ее в начало координат заменой переменных $y = x - p$, причем p вовсе не обязательно должна служить точкой равновесия разомкнутой системы.

Обратную связь $u = \gamma(t, x)$ называют *статической*, поскольку она не использует предыдущих значений $x(t)$. Бывают еще *динамические* обратные связи

$$u = \gamma(t, x, z), \quad \dot{z} = g(t, x, z).$$

Нелинейные системы вносят свою специфику в понятие стабилизации. Так, если линейная система стабилизирована обратной связью, то замкнутая система глобально асимптотически устойчива. Если нелинейная система стабилизирована путем ее линеаризации, то ее нулевое решение будет асимптотически устойчиво, но область притяжения не ясна без дополнительного анализа. В этом случае говорят, что обратная связь обеспечивает *локальную стабилизацию*. Если обратная связь построена так, что некоторое известное множество включено в область притяжения, то говорят о *региональной стабилизации*. Если эта область — все фазовое пространство, то это *глобальная стабилизация*. Если же обратная связь может быть так построена по любому наперед заданному компактному, чтобы он оказался подмножеством области притяжения, то мы будем говорить о *полуглобальной стабилизации*.

Пример 11.1. Предположим, что требуется стабилизировать скалярную систему

$$\dot{x} = x^2 + u$$

с помощью обратной связи от состояния к управлению. Линеаризация приводит к уравнению $\dot{x} = u$, которое стабилизируется управлением $u = -kx$ при $k > 0$. Применяя это управление к нелинейной системе, получаем

$$\dot{x} = -kx + x^2.$$

Таким образом, по теореме 3.7 замкнутая система локально асимптотически устойчива, то есть обратная связь $u = -kx$ обеспечивает локальную стабилизацию. Нетрудно видеть, что область притяжения в данном случае — множество $\{x : |x| <$

$k\}$. С учетом этой информации мы имеем региональную стабилизацию. Поскольку любой шар $B_r = \{x : |x| \leq r\}$ может быть включен в множество притяжения при выборе $k > r$, мы получаем полуглобальную оптимизацию, причем глобальной стабилизации на самом деле нет. Она может быть получена применением обратной связи

$$u = -x^2 - kx.$$

Более общая задача — отслеживание задающего воздействия по выходу в присутствии возмущения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u, w), \\ y &= h(t, x, u, w), \\ y_m &= h_m(t, x, u, w), \end{aligned}$$

где x — состояние, u — управление, w — возмущение, y — управляемый выход, y_m — измеряемый выход; цель управления — обеспечить

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \approx 0 \quad \forall t \geq t_0,$$

где y_R — задающее воздействие. Трудно ожидать, что цель управления будет выполнена сразу, поскольку она зависит от начальных данных $x(0)$. Поэтому чаще рассматривается асимптотическое равенство

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Оно достижимо при отсутствии возмущения или в случае затухающего возмущения, а в общем случае рассматривают задачу подавления (ослабления) действия возмущения, обеспечивая неравенство

$$\|e(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq T,$$

где ϵ — предварительно заданная (малая) положительная величина. Вместо равномерной нормы можно рассматривать среднеквадратичную по времени, в чем и заключается постановка задачи H_∞ -оптимизации.

Важный частный случай задачи отслеживания — случай постоянного задающего воздействия. Его и будем рассматривать.

Линейные системы и линеаризация

Линейная система

$$\dot{x} = Ax \tag{92}$$

имеет точку равновесия в нуле. При $\det A \neq 0$ она изолированная, в противном случае множеством равновесия служит нуль-пространство матрицы A . Сведением этой матрицы к жордановой форме элементарно доказывается

Теорема 3.5. Точка равновесия $x = 0$ устойчива в том и только в том случае, если все собственные числа A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ и максимальная размерность жорданова блока с $\operatorname{Re} \lambda = 0$ равна единице. Точка $x = 0$ глобально асимптотически устойчива в том и только в том случае, если все собственные числа A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Пример 3.12. Рассмотрим две идентичных подсистемы, каждая из которых описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \end{aligned}$$

и соединим их сперва последовательно, а затем параллельно. Пусть A_s и A_p — матрицы в уравнениях этих систем, а A_s и A_p — их жордановы формы:

$$\begin{aligned} A_p &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_p = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \\ A_s &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_s = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

По теореме 3.5 параллельное соединение устойчиво, а последовательное — нет.

Асимптотическую устойчивость можно также исследовать с помощью функций Ляпунова. Рассмотрим квадратичную функцию

$$V(x) = x^* P x,$$

где P — вещественная симметрическая положительно определенная матрица. Ее производная в силу системы (92 с.45) будет

$$\dot{V}(x) = x^* P \dot{x} + \dot{x}^* P x = -x^* Q x,$$

где Q — симметрическая матрица, задаваемая равенством

$$PA + A^* P = -Q. \quad (93)$$

По теореме 3.1 из положительной определенности Q следует асимптотическая устойчивость. И наоборот, если P — решение уравнения Ляпунова (93) для положительной матрицы Q , и при этом P — положительная матрица, то система (92 с.45) устойчива. Для линейных систем можно утверждать больше:

Теорема 3.6. *Матрица A гурвицева тогда и только тогда, когда для произвольной $Q = Q^* > 0$ существует положительное самосопряженное (симметрическое) решение уравнения Ляпунова (93). Для гурвицевой A его решение единственно.*

Доказательство основано на формуле

$$P = \int_0^\infty \exp(A^* t) Q \exp(At) dt, \quad (94)$$

но уравнение Ляпунова линейно относительно P , поэтому оно может быть решено обычным способом:

Пример 3.13. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение Ляпунова переписывается в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решая, получаем

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Матрица P положительно определена по критерию Сильвестра, поэтому матрица A гурвицева.

Квадратичные функции Ляпунова дают возможность исследовать нелинейные системы.

Рассмотрим опять систему (?? с.??) с нулевым состоянием равновесия, то есть

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0.$$

Представим правую часть в виде

$$f(x) = f(x) - f(0) = Ax + g(x),$$

где

$$A = f'(0), \quad g(x) = o(x) \Leftrightarrow g(x)/\|x\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow 0} 0.$$

Построив функцию Ляпунова $V(x) = x^* P x$ с помощью уравнения Ляпунова (94), получаем:

Теорема 3.7.

1. Если матрица $A = f'(0)$ гурвицева, то нулевая точка равновесия асимптотически устойчива.
2. Если у A существует собственное число с положительной вещественной частью, то нулевая точка равновесия неустойчива.

Вырожденный случай остается нерассмотренным:

Пример 3.14. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = ax^3.$$

Линеаризация около нуля дает нулевую матрицу A , и теорема 3.7 не может помочь в определении устойчивости. Ответ может быть получен с использованием функции Ляпунова $V(x) = x^4$ и зависит от знака a .

Пример 3.15. У маятника

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2$$

имеются две точки равновесия — $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ и $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$. Исследуем их на устойчивость посредством линеаризации. Матрица Якоби имеет вид

$$f'_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}.$$

При $x = 0$ получаем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

с собственными числами

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{4g}{l}},$$

у которых вещественная часть отрицательна при ненулевом трении, и в этом случае точка равновесия асимптотически устойчива. Если же трения нет, то теорема ответа не дает, хотя выше (пример 3.3) была показана устойчивость с использованием энергии в качестве функции Ляпунова.

При $x_1 = \pi$ получаем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}$$

с собственными числами

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l}},$$

одно из которых всегда положительно. Соответственно, получаем неустойчивость.

Синтез через линеаризацию.

Стабилизация.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (95)$$

где $f(0, 0) = 0$ и $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в области $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$, которая содержит начало координат. Требуется построить обратную связь по состоянию $u = \gamma(x)$, которая стабилизирует систему. Линеаризация уравнения (95) около нулевой точки приводит к уравнению

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (96)$$

где

$$A = \partial f(0, 0)/\partial x, \quad B = \partial f(0, 0)/\partial u.$$

Предположим, что пара (A, B) управляема, или уж по меньшей мере стабилизируема. Построим матрицу K таким образом, чтобы обеспечить расположение собственных чисел матрицы $A + BK$ в заданных точках левой полуплоскости, и применим обратную связь $u = Kx$ к нелинейной системе (95). Замкнутая система будет описываться уравнением

$$\dot{x} = f(x, Kx), \quad (97)$$

линеаризация которого около точки равновесия $x = 0$ приводит к системе

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, Kx)K \right]_{x=0} x = (A + BK)x.$$

Поскольку матрица $A + BK$ гурвицева, из теоремы 3.7 следует асимптотическая устойчивость нулевого решения замкнутой системы (97). На самом деле по теореме 3.11 имеет место экспоненциальная устойчивость. Кроме того, теорема 3.6 доставляет квадратичную функцию Ляпунова $V(x) = x'Px$, где P — решение уравнения

$$P(A + BK) + (A + BK)'P = -Q < 0.$$

Это дает возможность оценить область притяжения нулевого решения.

Пример 11.2. Рассмотрим уравнение маятника

$$\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT,$$

где $a = g/l > 0$, $b = k/m \geq 0$, $c = 1/ml^2 > 0$, θ — угол отклонения маятника от вертикали, T — приложенный к маятнику момент (управляющее воздействие). Стабилизируем маятник под углом $\theta = \delta$. Выбрав

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta},$$

в пространстве состояний получаем уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - bx_2 + cT. \end{aligned}$$

Чтобы нулевое решение стало точкой равновесия, внешний момент должен иметь постоянную составляющую T_{ss} , определяемую из уравнения

$$0 = -a \sin(\delta) + cT_{ss}.$$

Определив управление $u = T - T_{ss}$, уравнение системы можно переписать в стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu. \end{aligned}$$

Линеаризация приводит к матричным коэффициентам

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos(x_1 + \delta) & -b \end{bmatrix}_{x_1=0} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пара (A, B) управляема. Пусть $K = [k_1 \ k_2]$. Тогда матрица $A + BK$ будет гурвицевой при

$$k_1 < \frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 < \frac{b}{c}.$$

Закон управления задается уравнением

$$t = \frac{a \sin \delta}{c} + Kx = \frac{a \sin \delta}{c} + k_1(\theta - \delta) + k_2\dot{\theta}.$$

Предлагается самостоятельно провести анализ замкнутой системы по Ляпунову.

На предмет стабилизации по выходу рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (98)$$

$$y = h(x), \quad (99)$$

где функции $f(\cdot), u(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, $f(0, 0) = 0$, $h(0) = 0$. Линеаризация системы около начала координат приводит к уравнениям

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (100)$$

$$y = Cx, \quad (101)$$

где A, B — матрицы, выписанные после уравнения (96 с.47), $C = \partial h(0)/\partial x$. Предположим, что пара (A, B) стабилизируема, а пара (A, C) детектируема. Построим такую линейную динамическую обратную связь

$$\dot{z} = Fz + Gy, \quad (102)$$

$$u = Lz + My, \quad (103)$$

что матрица замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix} \quad (104)$$

гурвицева. Например, такую обратную связь можно построить с помощью наблюдателя, взяв

$$F = A + BK + HC, \quad G = -H, \quad L = K, \quad M = 0,$$

где K и H выбраны таким образом, чтобы матрицы $A + BK$ и $A + HC$ были гурвицевыми. Применяв регулятор (102),(?? с.??) к нелинейной системе (98),(99), получаем замкнутую систему

$$\dot{x} = f(x, Lz + Mh(x)), \quad (105)$$

$$\dot{z} = Fz + Gh(x). \quad (106)$$

Можно показать, что начало координат $(x = 0, z = 0)$ — точка равновесия системы (105),(106), а ее линеаризация около этой точки приводит к гурвицевой матрице (104). Таким образом, мы опять получили экспоненциальную устойчивость замкнутой системы, а определенная по гурвицевой матрице (104) квадратичная функция Ляпунова дает возможность оценить область притяжения.

Пример 11.3. Рассмотрим опять уравнение маятника из предыдущего примера. Пусть измерению доступен угол θ , но не угловая скорость $\dot{\theta}$. В качестве выходной переменной можно взять $y = x_1 = \theta - \delta$ и дополнить обратную связь по состоянию наблюдателем

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(\hat{x}_1 - y).$$

Если $H = (h_1, h_2)'$, то матрица $A + HC$ будет гурвицевой при

$$-h_1 + b > 0, \quad -h_1b - h_2 + a \cos \delta > 0.$$

Управляющий момент задается уравнением

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} + K\hat{x}.$$

Интегрирующая обратная связь.

Построенный с помощью линеаризации регулятор может оказаться чувствительным к неточностям в определении параметров объекта управления. Рассмотрим пример 11.2. Закон управления в этом примере задается уравнением

$$T = \frac{a \sin \delta}{c} + K\hat{x}.$$

Его правая часть содержит постоянную составляющую $T_{ss} = (a/c) \sin \delta$ и составляющую $K\hat{x}$, которая обеспечивает обратную связь и делает матрицу $A + BK$ гурвицевой. Хотя обе составляющие зависят от параметров объекта, характер этой зависимости различный. Обратная связь может быть построена так, чтобы обеспечить робастность (нечувствительность) системы в широком диапазоне параметров. Пусть, например, относительно параметров объекта известно только то, что $a/c < \rho$, $a > 0$, $c > 0$, $b \geq 0$, где ρ фиксировано. Тогда неравенства

$$k_1 < -\rho, \quad k_2 < 0$$

обеспечивают гурвицевость матрицы $A + BK$. Для постоянной составляющей подобной нечувствительности добиться трудно. Пусть, например, значение T_{ss} определено исходя из того, что параметры a, c принимают номинальные значения a_0, c_0 соответственно. Точка равновесия замкнутой системы задается уравнением

$$\sin \theta_{ss} = \frac{cT_{ss}}{a} = \frac{a_0c}{ac_0} \sin \delta.$$

Если $\delta = 0$ или $\delta = \pi$, то $T_{ss} = 0$ и регулятор нечувствителен к значениям параметров. Для других значений δ ошибка в определении постоянной составляющей может быть одного порядка с ошибкой в определении параметров. Например, при $\delta = 45^\circ$, $c \approx c_0$, $a \approx 1.1a_0$ получаем $\theta_{ss} \approx 40^\circ$, и ошибка будет около 10%.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (107)$$

$$y = h(x), \quad (108)$$

где функции $f(\cdot), h(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы около начала координат. В дополнение к измерению состояния предполагается возможным физически измерять подлежащий управлению выход y (уравнением (108) для определения y пользоваться некорректно, поскольку истинная функция $h(\cdot)$ может отличаться от номинальной $h_0(\cdot)$). Требуется обеспечить такую обратную связь, чтобы

$$y(t) \rightarrow y_R \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

то есть стабилизировать систему в такой точке равновесия, что $y = y_R$, где $y_R \in R^p$ — постоянное задающее воздействие. Чтобы такая точка равновесия существовала, должна существовать пара (x_{ss}, u_{ss}) , удовлетворяющая уравнениям

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}), \quad (109)$$

$$0 = h(x_{ss}) - y_R, \quad (110)$$

Будем предполагать, что эти уравнения имеют около начала координат единственное решение (x_{ss}, u_{ss}) . Проинтегрировав ошибку отслеживания $e = y - y_R$

$$\dot{\sigma} = e$$

и дополнив интегратор уравнением управляемой системы, получаем

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (111)$$

$$\dot{\sigma} = h(x) - y_R. \quad (112)$$

Обратную связь будем строить на основе расширенного фазового вектора (x, σ) , линеаризуя уравнения (111),(112) около точки равновесия $(\bar{x}, u_{ss}, \bar{\sigma})$ при $\bar{x} = x_{ss}$:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}v,$$

$$\text{где } \xi = \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ \sigma - \bar{\sigma} \end{bmatrix}, \quad v = u - u_{ss},$$

$$A = \frac{\partial f(x_{ss}, u_{ss})}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f(x_{ss}, u_{ss})}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial h(x_{ss})}{\partial x}.$$

Эти матрицы зависят, вообще говоря, от y_R . Предположим, что пара (A, B) управляема (стабилизируема) и

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + p. \quad (113)$$

Тогда пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ также управляема (соответственно, стабилизируема). Построим такую матрицу K , что матрица $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ гурвицева. Матрица K зависит от y_R . Разобьем матрицу K на блоки: $[K_1 \ K_2]$, где K_1 имеет размерность $p \times n$. Матрица K_2 будет невырожденной¹. Обратная связь от состояния к управлению имеет вид

$$u = K_1(x - x_{ss}) + K_2(\sigma - \bar{\sigma}) + u_{ss}.$$

Дополнительная возможность, предоставляемая интегрирующим управлением, заключается в произвольном выборе значения $\bar{\sigma}$. Взяв

$$\bar{\sigma} = K_2^{-1}(u_{ss} - K_1 x_{ss}) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ss},$$

получаем простейший вид управления

$$u = K_1 x + K_2 \sigma. \quad (114)$$

Применив это управление к объекту (111),(112), получаем замкнутую систему

$$\dot{x} = f(x, K_1 x + K_2 \sigma), \quad (115)$$

$$\dot{\sigma} = h(x) - y_R. \quad (116)$$

¹Если матрица K_2 вырожденная, то и $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ будет вырожденной, что противоречит предположению о ее гурвицевости.

Нетрудно проверить, что (x_{ss}, σ_{ss}) — точка равновесия замкнутой системы. На самом деле эта точка равновесия еще и единственная в рассматриваемой области, поскольку там имеется единственная пара (x_{ss}, u_{ss}) , удовлетворяющая уравнениям (109 с.49), (110 с.49). Линеаризация замкнутой системы около этой единственной точки приводит к уравнению

$$\dot{\xi} = \mathcal{A}_c \xi,$$

где

$$\mathcal{A}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} K_1 & \frac{\partial f}{\partial u} K_2 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{x=x_{ss}, \sigma=\sigma_{ss}} = \mathcal{A} + \mathcal{B}K.$$

Таким образом, (x_{ss}, σ_{ss}) — экспоненциально устойчивая точка, и все решения, начинающиеся достаточно близко от нее, приближаются к ней по мере роста t . Соответственно, $y(t) - y_R \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Окончательно, предполагая пару (A, B) стабилизируемой и условие полного ранга (113 с.49) выполненным, получаем следующие уравнения обратной связи от состояния к управлению:

$$\begin{aligned} u &= K_1 x + K_2 \sigma, \\ \dot{\sigma} &= e = y - y_R, \end{aligned}$$

где матрица $K = [K_1 \ K_2]$ выбрана таким образом, что $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ — гурвицева матрица.

Пример 11.4. Рассмотрим опять уравнение маятника из примера 11.2, считая целью управления стабилизацию маятника под углом $\theta = \delta$. Обозначив

$$x_1 = \theta - \delta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad y = \theta - \delta, \quad u = T,$$

получаем уравнения в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta) - b x_2 + c u, \\ y &= x_1 = e. \end{aligned}$$

Взяв $y_R = 0$, нетрудно убедиться, что искомая точкой равновесия будет

$$x_{ss} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{ss} = \frac{a}{c} \sin \delta.$$

Матрицы A, B, C задаются равенствами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0].$$

С учетом неравенства $c > 0$ нетрудно проверить управляемость пары (A, B) и ранговое условие (113 с.49). Взяв $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ и применив критерий Рауса-Гурвица, убеждаемся в гурвицевости матрицы $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$ при

$$\begin{aligned} b - k_2 c &> 0, \quad -k_3 c > 0, \\ (b - k_2 c)(a \cos \delta - k_1 c) + k_3 c &> 0. \end{aligned}$$

Если вместо точных значений параметров $a > 0, b \geq 0, c > 0$ известны верхняя граница ρ_1 для a и нижняя граница ρ_2 для c , то выбор

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad k_1 < -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left(1 + \frac{k_3}{k_2 \rho_1}\right) \quad (117)$$

обеспечивает гурвицевость матрицы $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$. Управляющий момент задается равенством

$$T = k_1(\theta - \delta) + k_2 \dot{\theta} + k_3 \sigma,$$

где $\dot{\sigma} = \dot{\theta} - \delta$, то есть получен классический ПИД-регулятор. В отличие от примера 11.2, в уравнения больше не входит постоянная составляющая момента, предназначенная для достижения заданной точки равновесия. Цель управления достигается при всех параметрах, удовлетворяющих условиям $a \leq \rho_1, c \geq \rho_2$.

Если вектор состояния не доступен для измерения, то построенный регулятор следует дополнить линейным наблюдателем, и устойчивость системы сохранится. Именно, пусть пара (A, C) наблюдаема. Построим такой матричный коэффициент наблюдателя H (возможно, зависящий от y_R), что матрица $A + HC$ гурвицева. Регулятор с наблюдателем будет задаваться уравнениями

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \sigma, \quad (118)$$

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R, \quad (119)$$

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B u + H(C \hat{x} - y). \quad (120)$$

Линеаризация "вход-состояние".

В этом разделе будем рассматривать системы вида

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad u = h(x).$$

Для систем этого вида ставится вопрос о существовании такой обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

и такой замены переменных

$$z = T(x),$$

что нелинейная система переходит в эквивалентную линейную.

Чтобы обозначить идею точной линеаризации обратной связью, начнем с задачи стабилизации маятника из примера 11.2. Из уравнений в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] - bx_2 + cu\end{aligned}$$

видно, что мы можем выбрать u в виде

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{v}{c},$$

чтобы убрать нелинейность $a[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta]$. В результате мы получаем линейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v.\end{aligned}$$

Таким образом, задача стабилизации нелинейной системы сведена к задаче стабилизации линейной управляемой системы. Мы можем воспользоваться обратной связью

$$v = k_1x_1 + k_2x_2,$$

чтобы собственные числа замкнутой системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 + (k_2 - b)x_2\end{aligned}$$

были расположены в заданных точках левой полуплоскости. В исходных терминах обратная связь описывается уравнением

$$u = \frac{a}{c}[\sin(x_1 + \delta) - \sin \delta] + \frac{1}{c}[k_1x_1 + k_2x_2].$$

Насколько общей является идея компенсации нелинейности? Чтобы устранить нелинейный член $\alpha(x)$ посредством вычитания, управляющее воздействие u и нелинейность должны входить в

уравнения системы только в виде суммы $\alpha(x) + u$. Для устранения нелинейности $\gamma(x)$ делением управляющее воздействие и нелинейность должны входить в уравнения системы только в виде произведения $\gamma(x)u$. Если матрица $\gamma(x)$ неособая, то нелинейность уничтожается введением нового управления $v = \gamma(x)u$, и тогда $u = [\gamma(x)]^{-1}v$. Следовательно, для того, чтобы из нелинейной системы исключением нелинейности можно было получить управляемую линейную систему, достаточно, чтобы исходная система имела вид

$$\dot{x} = Ax + B[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)], \quad (121)$$

где A, B — управляемая пара матриц размерностей $n \times n$ и $n \times p$ соответственно, а функции $\alpha(\cdot) : R^n \rightarrow R^p$ и $\beta(\cdot) : R^n \rightarrow R^{p \times p}$ определены в окрестности начала координат $D_x \subset R^n$, причем матрица $\beta(x)$ неособая для любого $x \in D_x$. Если уравнение системы имеет вид (121), то мы можем линеаризовать его посредством обратной связи

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (122)$$

получив линейное уравнение

$$\dot{x} = Ax + Bv. \quad (123)$$

Для стабилизации достаточно взять $v = Kx$ с такой матрицей K , которая обеспечивает гурвицевость $A + BK$. Итоговое уравнение нелинейной обратной связи от состояния к управлению будет

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx \quad (124)$$

Если нелинейная система не описывается уравнением вида (121), это еще не значит, что ее нельзя линеаризовать. В этом может помочь замена переменных. Рассмотрим, например, систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u.\end{aligned}$$

Мы не можем устранить нелинейность $a \sin x_2$ путем выбора управления. Однако, сделав предварительно замену переменных

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \sin x_2 = \dot{x}_1,$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2(-x_1^2 + u),\end{aligned}$$

и нелинейность может быть подавлена управлением

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v,$$

определенным при $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$. Выразив $x_{1,2}$ в терминах $z_{1,2}$ (т.е. $x_1 = z_1$, $x_2 = \arcsin(z_2/a)$), получаем уравнение системы в новых координатах:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= a \cos\left(\arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right)\right) (-z_1^2 + u). \end{aligned}$$

При замене переменных $z = T(x)$ отображение $T(\cdot)$ должно быть обратимым. Более того, поскольку производные от x и z должны быть непрерывны, мы будем требовать непрерывной дифференцируемости как от $T(x)$, так и от $T^{-1}(x)$, то есть отображение $T(\cdot)$ должно быть диффеоморфизмом.

Определение 12.1. *Нелинейная система*

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u \quad (125)$$

где $f : D_x \rightarrow R^n$ и $G : D_x \rightarrow R^{n \times p}$ — достаточно² гладкие функции на $D_x \subset R^n$, называется линейризуемой обратной связью от состояния к выходу, если существует такой диффеоморфизм $T : D_x \rightarrow R^n$, что область $D_z = T(D_x)$ содержит начало координат и замена переменных $z = T(x)$ преобразует систему (125) к виду

$$\dot{z} = Az + B[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)], \quad (126)$$

где (A, B) — управляемая пара и $\beta(x)$ — невырожденная матрица при всех $x \in D_x$.

Положив

$$\alpha_0(z) = \alpha(T^{-1}(z)), \quad \beta_0(z) = \beta(T^{-1}(z)),$$

можно переписать (126) в виде

$$\dot{z} = Az + B[\beta_0(z)]^{-1}[u - \alpha_0(z)], \quad (127)$$

что совпадает по форме с (121 с.51). Удобнее, однако, использовать выражение для α и β в x -координатах, поскольку именно в этих координатах записывается обратная связь.

²Достаточно, чтобы все выписанные ниже частные производные существовали и были непрерывны.

Пусть замена $z = T(x)$ приводит линейризуемую систему (125) к виду (126). Тогда

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + G(x)u]. \quad (128)$$

С другой стороны, из (126) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)] = \\ &= AT(x) + B[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)]. \end{aligned} \quad (129)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + G(x)u] = AT(x) + B[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)]$$

для всех x и u из представляющей интерес области. Взяв $u = 0$, разбиваем полученное уравнение на два:

$$\frac{\partial T}{\partial x} f(x) = AT(x) - B[\beta(x)]^{-1}\alpha(x), \quad (130)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} G(x) = B[\beta(x)]^{-1}u. \quad (131)$$

Таким образом, любая функция $T(\cdot)$, преобразующая линейризуемую систему (125) к виду (126), удовлетворяет паре уравнений в частных производных (130),(131). Нетрудно убедиться, что верно и обратное: если отображение $T(\cdot)$ удовлетворяет уравнениям (130),(131) для некоторых α, β, A и B с соответствующими свойствами, то замена переменных $z = T(x)$ преобразует уравнение (125) к виду (126). Следовательно, разрешимость уравнений (130),(131) — необходимое и достаточное условие линейризуемости.

Разумеется, отображение $T(\cdot)$ определяется не однозначно. В частности, применив к (126) линейное преобразование $\zeta = Mz$ с невырожденной матрицей M , вновь получаем уравнение того же вида, но с другими матрицами A и B :

$$\dot{\zeta} = MAM^{-1}\zeta + MB[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)],$$

то есть вместо $T(\cdot)$ можно использовать суперпозицию $MT(\cdot)$. Воспользуемся этим для упрощения уравнений (130),(131), рассматривая для простоты системы со скалярным входом ($p = 1$) и введя новое обозначение g для одностолбцовой матрицы G . Для любой управляемой пары

(A, B) существует неособая матрица M , приводящая эту пару к каноническому виду: $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda'$, $MB = B_c$, где

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (132)$$

λ — вектор коэффициентов характеристического многочлена. Член $B_c\lambda'\zeta = B_c\lambda'T(x)$ можно включить в $B_c[\beta(x)]^{-1}\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (A_c + B_c\lambda')\zeta + B_c[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)] = \\ &= A_c\zeta + B_c\lambda'MT(x) + B_c[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x)] = \\ &= A_c\zeta + B_c[\beta(x)]^{-1}[u - \alpha(x) + \beta(x)\lambda'MT(x)]. \end{aligned}$$

Следовательно, без потери общности можно считать, что матрицы A, B в уравнениях (130 с.52), (131 с.52) имеют канонический вид A_c, B_c .

Пронумеруем компоненты вектор-функции $T(\cdot): T(x) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x))'$. Очевидно,

$$\begin{aligned} A_cT(x) - B_c[\beta(x)]^{-1}\alpha(x) &= \\ &= (T_2(x), T_3(x), \dots, T_n(x), -\alpha(x)/\beta(x))', \\ B_c[\beta(x)]^{-1} &= (0, 0, \dots, 0, 1/\beta(x))', \end{aligned}$$

где $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ — скалярные функции. В результате уравнения (130 с.52), (131 с.52) превращаются в систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) &= T_2(x), & \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) &= T_3(x), & \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x), & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) &= -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, & \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &= \frac{1}{\beta(x)} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, требуется найти функцию $T_1(x)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &\neq 0, \end{aligned} \quad (133)$$

где

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Если такая функция $T_1(\cdot)$ найдется, то функции $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ определяются равенствами

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}, \quad \alpha(x) = -\frac{(\partial T_n / \partial x) f(x)}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}. \quad (134)$$

Поясним решение (133) на примерах. Будем предполагать, что линеаризация проводится с целью стабилизировать состояние около точки равновесия разомкнутой системы x^* , то есть $f(x^*) = 0$. Отображение $T(\cdot)$ будем выбирать так, чтобы точка x^* отображалась в начало координат: $T(x^*) = 0$. Этому можно добиться, дополнив (133) условием $T_1(x^*) = 0$, остальные компоненты автоматически будут нулевыми, поскольку $f(x^*) = 0$.

Пример 12.1. Рассмотрим вновь систему

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \sin x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \stackrel{def}{=} f(x) + gu,$$

и посмотрим, как можно из (133) получить уже рассмотренное выше отображение T . Разомкнутая система имеет точку равновесия при $x = 0$, поэтому будем искать $T_1(x)$, исходя из условий

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} \neq 0$$

при $T_1(0) = 0$, где

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x).$$

Из условия $[\partial T_1 / \partial x] g = 0$ получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0,$$

то есть T_1 не зависит от x_2 . Следовательно,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \sin x_2.$$

Условие

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos x_2 \neq 0$$

в области, где $\cos x_2 \neq 0$, выполнено при любом $T_1 = T_1(x_1)$, для которого $\partial T_1 / \partial x_1 \neq 0$. Взяв

$T_1(x) = x_1$, получаем преобразование, которое мы использовали ранее. Другой выбор также возможен, например, $T_1(x) = x_1 + x_1^3$ дает другую замену переменных, которая также преобразует систему к виду (126 с.52).

Пример 12.2. Синхронный генератор, подсоединенный к бесконечной шине, может быть представлен моделью третьего порядка (упражнение 1.7)

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

при $g = [0 \ 0 \ 1]'$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos\delta] \end{bmatrix},$$

где a, b, c, d, δ — положительные постоянные. Разомкнутая система имеет точку равновесия при $x = 0$. Будем искать функцию $T_1(x)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} \neq 0$$

при $T_1(0) = 0$, где

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x), \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x).$$

Из условия $(\partial T_1/\partial x)g = 0$ получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0,$$

то есть T_1 не зависит от x_3 . Следовательно,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \{a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] + bx_2\}.$$

Из условия $(\partial T_2/\partial x)g = 0$ получаем

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0,$$

поэтому выбираем T_1 не зависящим от x_2 . Соответственно,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2,$$

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \{a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] + bx_2\}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} g = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_1},$$

и условие $(\partial T_3/\partial x)g \neq 0$ в области $0 < x_1 + \delta < \pi$ выполнено для любой такой функции $T_1 = T_1(x_1)$, что $\partial T_1/\partial x_1 \neq 0$ в этой области. Простейший выбор $T_1 = x_1$ обеспечивает это неравенство вместе с условием $T_1(0) = 0$. Используя полученные выражения, получаем, что замена переменных $z = T(x)$ задается равенствами

$$\begin{aligned} z_1 = T_1(x) &= x_1, \\ z_2 = T_2(x) &= x_2, \\ z_3 = T_3(x) &= a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] + bx_2. \end{aligned}$$

Обратное преобразование $x = T^{-1}(z)$ определено при $0 < z_1 + \delta < \pi$ и задается равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, \\ x_2 &= z_2, \\ x_3 &= -1 - \frac{z_1 + bz_2 - a \sin \delta}{a \sin(z_1 + \delta)}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (134 с.53), получаем

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_3/\partial x)g} = \frac{1}{(\partial T_3/\partial x_3)} = \frac{-1}{a \sin(x_1 + \delta)},$$

и аналогично (более громоздко) для $\alpha(x)$. Уравнения системы в z -координатах будут

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= -a \sin(x_1 + \delta)[u - \alpha(x)]; \end{aligned}$$

они линеаризуются посредством обратной связи

$$u = \alpha(x) - \frac{1}{\sin(x_1 + \delta)} v.$$

Эти уравнения, отметим, справедливы только в области $0 < z_1 + \delta < \pi$, где преобразование $z = T(x)$ определено и является диффеоморфизмом.

Пример 12.3. Двухзвенный манипулятор с упругим шарнирным соединением без трения можно представить моделью четвертого порядка:

$$\dot{x} = f(x) + gu,$$

где

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c(x_1 - x_3) \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix},$$

a, b, c, d — положительные постоянные. Разомкнутая система имеет точку равновесия при $x = 0$. Будем искать функцию $T_1 = T_1(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} g = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial T_4}{\partial x} g \neq 0$$

при $T_1(0) = 0$, где

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Из условия $(\partial T_1 / \partial x)g = 0$ следует $(\partial T_1 / \partial x_4) = 0$, так что мы должны выбирать T_1 не зависящим от x_4 . Следовательно,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} x_4.$$

Из условия $(\partial T_2 / \partial x)g = 0$ следует

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0,$$

так что T_1 не зависит также и от x_3 . Таким образом,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)],$$

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} x_4.$$

Наконец,

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0,$$

и мы выбираем T_1 не зависящим от x_2 . Следовательно,

$$T_4(x) = \frac{\partial T_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} [-a \sin x_1 - b(x_1 - x_3)] + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} x_4,$$

и условие $(\partial T_4 / \partial x)g \neq 0$ выполнено, если $(\partial T_1 / \partial x_1) \neq 0$. Возьмем $T_1(x) = x_1$, тогда замена переменных

$$z_1 = T_1(x) = x_1,$$

$$z_2 = T_2(x) = x_2,$$

$$z_3 = T_3(x) = -a \sin x_1 - b(x_1 - x_3),$$

$$z_4 = T_4(x) = -ax_2 \cos x_1 - b(x_2 - x_4)$$

преобразует уравнение системы к виду (127 с.52):

$$\dot{z}_1 = z_2,$$

$$\dot{z}_2 = z_3,$$

$$\dot{z}_3 = z_4,$$

$$\dot{z}_4 = -(a \cos z_1 + b + c)z_3 + a(z_2^2 - c) \sin z_1 + bdu$$

В отличие от предыдущего примера, эти уравнения заданы глобально, поскольку $z = T(x)$ — глобальный диффеоморфизм: $T(\cdot)$ и $T^{-1}(\cdot)$ заданы глобально, и $T(R^n) = R^n$.

Пример 12.4. Индукционный электродвигатель постоянного тока с пренебрежимо малым коэффициентом демпфирования (трением на валу?) можно представить моделью третьего порядка

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

при

$$f(x) = \begin{bmatrix} -ax_1 \\ -bx_2 + \rho - cx_1x_3 \\ \theta x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где a, b, c, θ, ρ — положительные постоянные. Разомкнутая система имеет множество точек равновесия при $x_1 = 0, x_2 = \rho/b$. Обозначим желательную для нас операционную точку $(0, \rho/b, \omega_0)'$ через x^* , где ω_0 — заданное значение угловой скорости. Мы ищем функцию $T_1(\cdot)$, удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} g = 0, \quad \frac{\partial T_3}{\partial x} \neq 0$$

при $T_1(x^*) = 0$, где

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x), \quad T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x).$$

Из условия $(\partial T_1 / \partial x)g = 0$ получаем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} = 0,$$

то есть T_1 не зависит от x_1 . Следовательно,

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}[-bx_2 + \rho - cx_1x_3] + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\theta x_1x_2.$$

Из условия $(\partial T_2/\partial x)g = 0$ получаем

$$cx_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = \theta x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_3}.$$

Это будет выполнено, если

$$T_1 = c_1[\theta x_2^2 + cx_3^2] + c_2$$

при некоторых постоянных c_1, c_2 . Возьмем $c_1 = 1$, и

$$c_2 = -\theta(x_2^*)^2 - c(x_3^*)^2 = -\theta(\rho/b)^2 - c\omega_0^2,$$

чтобы обеспечить условие $T_1(x^*) = 0$. При таком выборе

$$T_2(x) = 2\theta x_2(\rho - bx_2),$$

откуда

$$T_3(x) = 2\theta(\rho - 2bx_2)(-bx_2 + \rho - cx_1x_3).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T_3}{\partial x}g = \frac{\partial T_3}{\partial x_1} = -2c\theta(\rho - 2bx_2)x_3,$$

и условие $(\partial T_3/\partial x)g \neq 0$ выполнено, если $x_2 \neq \rho/2b$ и $x_3 \neq 0$. Предполагая $x_3^* > 0$, определим область

$$D_x = \{x \in R^3 \mid x_2 > \rho/2b \text{ и } x_3 > 0\},$$

которая содержит точку x^* . Нетрудно убедиться, что отображение $z = T(x)$ — диффеоморфизм на D_x и уравнение системы в z -координатах определено на области

$$D_s = T(D_x) = \left\{ z \in R^3 \mid \begin{array}{l} z_1 > \theta\phi^2(z_2) - \theta(\rho/b)^2 - \\ -c\omega_0^2 \text{ и } z_2 < \frac{\theta\rho^2}{2b} \end{array} \right\},$$

где $\phi(\cdot)$ — обратное отображение к $2\theta x_2(\rho - bx_2)$, определенное при $x_2 > \rho/2b$. Область D_z содержит начало координат.

Обратные связи по состоянию.

Стабилизация

Рассмотрим линеаризуемую по состоянию систему

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)], \quad z = T(x),$$

где $T(x)$ — диффеоморфизм на $D_x \subset R^n$, $D_z = T(D_x)$ содержит начало координат, пара (A, B) вполне управляема, матрица $\beta(x)$ не вырождена при всех $x \in D_x$, и обе матрицы $\alpha(x), \beta(x)$ непрерывно дифференцируемы. Построим такую матрицу K , что $A + BK$ — гурвицева матрица. Обратная связь

$$u = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)$$

приводит к линейному уравнению замкнутой системы

$$\dot{z} = (A + BK)z.$$

Рассмотрим вопрос о чувствительности. На практике регулятор скорее всего будет задаваться уравнением

$$u = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x),$$

где функции $\hat{\alpha}(x), \hat{\beta}(x), \hat{T}(x)$ отличаются от номинальных. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B\beta^{-1}(x)[\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x)] = \\ &= (A + BK)z + B\delta(z), \end{aligned}$$

где

$$\delta(z) = \beta^{-1}(x)\{\hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\hat{\beta}(x) - \beta(x)]KT(x) + \hat{\beta}(x)K[\hat{T}(x) - T(x)]\}, \quad x = T^{-1}(z).$$

Таким образом, уравнение замкнутой системы можно рассматривать как результат возмущения системы номинальной, то есть $\dot{z} = (A + BK)z$. Проанализируем устойчивость. Пусть $P + P' > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$P(A + BK) + (A + BK)'P = -Q,$$

где $Q = Q' < 0$. Предположим, что в окрестности начала координат $\|\beta(z)\|_2 \leq \gamma_1\|z\|_2 + \gamma_2$ для

некоторых положительных величин $\gamma_{1,2}$. Используя функцию Ляпунова $V(z) = z'Pz$, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &= -z'Qz + 2z'Pb\delta(z) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_1\|z\|_2^2 + \\ &\quad + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2.\end{aligned}$$

Если $\gamma_1 < \lambda_{\min}(Q)/4\|PB\|_2$, то

$$\begin{aligned}\dot{V}(z) &\leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2 \leq \\ &\leq -\frac{1}{4}\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 \quad \forall \|z\|_2 \geq \frac{8\|PB\|_2\gamma_2}{\lambda_{\min}(Q)},\end{aligned}$$

откуда следует диссипативность (предельная ограниченность) с пропорциональным γ_2 радиусом диссипативности. Если $\delta(0) = 0$, то можно взять $\gamma_2 = 0$. В этом случае начало координат будет асимптотически устойчиво при $\gamma_1 < \lambda_{\min}(Q)/2\|PB\|_2$.

Пример 12.13. Рассмотрим маятник

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta_1) - bx_2 + cu,\end{aligned}$$

где $x_1 = \theta - \delta_1$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = T$ — входной момент. Цель управления — стабилизация при $\theta = \delta_1$. Линеаризующая и стабилизирующая обратная связь задается уравнением

$$u = \left(\frac{a}{c}\right) \sin(x_1 + \delta_1) + \left(\frac{1}{c}\right) (k_1x_1 + k_2x_2),$$

где коэффициенты $k_{1,2}$ выбраны таким образом, что

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - b \end{bmatrix}$$

— гурвицева матрица. Предположим, что из-за неопределенности относительно значений параметров a и c управляющее воздействие вычисляется по формуле

$$u = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}}\right) \sin(x_1 + \delta_1) + \left(\frac{1}{\hat{c}}\right) (k_1x_1 + k_2x_2),$$

где \hat{a} и \hat{c} — приближенные значения параметров. Замкнутую систему будет описывать уравнение

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 + (k_2 - b)x_2 + \delta(x),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \left(\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right) \sin(x_1 + \delta_1) + \\ &\quad + \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right) (k_1x_1 + k_2x_2).\end{aligned}$$

Ошибка глобально удовлетворяет неравенству $|\delta(x)| \leq \gamma_1\|x\|_2 + \gamma_2$, где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left|\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| + \left|\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}}\right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \gamma_2 &= \left|\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}}\right| |\sin \delta_1|.\end{aligned}$$

Пусть

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

— решение уравнения Ляпунова $P(A+BK) + (A+BK)'P = -I$. Если

$$\gamma_1 < \frac{1}{4\sqrt{p_{12}^2 + p_{22}^2}},$$

то замкнутая система глобально диссипативна с радиусом, пропорциональным γ_2 . Если $\sin \delta_1 = 0$, то приведенная оценка для γ_1 гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость.

0.3 Линеаризация "вход-выход".

Линеаризация уравнения состояния не всегда линеаризует уравнение наблюдения (если оно есть). Например, если выходом системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u\end{aligned}$$

служит $y = x_2$, то замена переменных и обратная связь по состоянию

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \sin x_2, \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2}v$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= v, \quad y = \arcsin\left(\frac{z_2}{a}\right).\end{aligned}$$

Нелинейность в наблюдении может усложнить, например, задачу отслеживания. Если же использовать обратную связь $u = x_1^2 + v$, то мы получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= v, \\ y &= x_2,\end{aligned}$$

и мы можем использовать линейную теорию для решения задачи отслеживания. Таким образом, иногда имеет смысл линеаризовать отображение вход-выход даже ценой того, что часть уравнения состояния останется нелинейной.

Рассмотренный пример демонстрирует еще одну черту линеаризации по выходу — динамика система может быть при этом охвачена не полностью. Действительно, полностью система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \sin x_2, \\ \dot{x}_2 &= v, \quad y = x_2.\end{aligned}$$

Наивный подход к построению обратной связи может привести к точному отслеживанию заданного значения выхода при бесконтрольном росте первой компоненты вектора состояния.

Рассмотрим систему со скалярными выходом и входом:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x),$$

где f, g и h — достаточно гладкие функции, заданные в области $D \subset R^n$. Простейшим случаем линеаризации по выходу является случай системы, которая одновременно линеаризируема обратной связью по состоянию, с которого мы и начнем. Пусть $T(x)$ — решение (133 с.53). Предположим, что функция $h(x)$ из уравнения измерения оказалась равной $T_1(x)$.³ Тогда замена переменных $z = T(x)$ и обратная связь $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ приводит к уравнениям

$$\dot{z} = A_c z + B_c v, \quad y = C_c z,$$

где (A_c, B_c, C_c) — каноническое представление цепочки из n интеграторов, то есть A_c и B_c имеют вид (132 с.53), и

$$C_c = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]_{1 \times n}. \quad (135)$$

³Например, при рассмотрении робота-манипулятора (пример 12.3) мы выбрали $T_1(x) = x_1$. Это и в самом деле может быть интересующим нас выходом, поскольку обычно рассматривается именно задача управления углом x_1 .

Для заданной функции наблюдения $h(x)$ мы можем попробовать, удовлетворяет ли она условию (133 с.53), рассматривая его как ограничение на характер зависимости производных y от u . Чтобы убедиться в этом, положим $\psi_1(x) = h(x)$. Производная \dot{y} задается равенством

$$\dot{y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} [f(x) + g(x)u].$$

Если $(\partial \psi_1 / \partial x)g(x) = 0$, то

$$\dot{y} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_2(x).$$

Вычислив вторую производную от y , получаем

$$\ddot{y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} [f(x) + g(x)u].$$

Если опять-таки $(\partial \psi_1 / \partial x)g(x) = 0$, то

$$\ddot{y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_3(x).$$

Повторяя этот процесс, убеждаемся в следующем: если функция $h(x) = \psi(x)$ удовлетворяет (133 с.53), то есть

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) \neq 0,$$

(где $\psi_{i+1} = (\partial \psi_n / \partial x) f(x)$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$), то u отсутствует в уравнениях для $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$ и возникает только в уравнении для $y^{(n)}$ с ненулевым коэффициентом:

$$y^{(n)} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)u.$$

Это уравнение ясно показывает, что рассматриваемая система вход-выход-линеаризируема, поскольку обратная связь

$$u = \frac{1}{(\partial \psi_n / \partial x)g(x)} \left[-\frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + v \right]$$

приводит отображение вход-выход к виду

$$y^{(n)} = v,$$

то есть к цепочке из n интеграторов. Что же будет, если u первый раз возникнет с ненулевым коэффициентом в уравнении для одной из производных $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, например, для $y^{(r)}$, где

$1 \leq r < n$? Тогда мы тоже можем линеаризовать отображение от входа к выходу: обратная связь

$$u = \frac{1}{(\partial\psi_r/\partial x)g(x)} \left[-\frac{\partial\psi_r}{\partial x}f(x) + v \right]$$

приводит его к цепочке из r интеграторов $y^{(r)} = v$. В этом случае рассматриваемая система имеет относительный порядок r в соответствии со следующим определением:

Определение 12.2. Пусть $f : D \rightarrow R^n$, $g : D \rightarrow R^n$, $h : D \rightarrow R$ — достаточно гладкие определенные на $D \subset R^n$ функции. Говорят, что нелинейная система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (136)$$

$$y = h(x) \quad (137)$$

имеет в области $D_0 \subset D$ относительный порядок $r \in [1, r]$, если

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x}g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial x}g(x) \neq 0, \quad (138)$$

при всех $x \in D_0$, где

$$\psi_1(x) = h(x), \quad \psi_{i+1} = \frac{\partial\psi_n}{\partial x}f(x). \quad (139)$$

Если система (136), (137) имеет относительный порядок r , то она вход-выход линеаризуема. Если она имеет относительный порядок n , то она одновременно вход-выход линеаризуема и линеаризуема по состоянию.

Пример 12.5. Рассмотрим уравнение ван дер Поля

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \epsilon > 0 \end{aligned}$$

с выходом $y = x_1$. Вычисляя его производные, получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u. \end{aligned}$$

Следовательно, относительный порядок равен 2 во всем R^2 , то есть система линеаризуема и по выходу, и по состоянию. Если $y = x_2$, то

$$\dot{y} = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u,$$

и относительный порядок равен 1 в R^2 . Если же $y = x_1 + x_2^2$, то

$$\dot{y} = x_2 + x_2[-x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u],$$

и относительный порядок равен 1 в $D_0 = \{x \in R^2 \mid x_2 \neq 0\}$.

Пример 12.6. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + u,$$

$$y = x_1.$$

Вычисляя производные y , получаем

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y.$$

Соответственно, $y^{(n)} = y = x_1$ при всех $n \geq 1$. Таким образом, в данном случае относительный порядок не определен. Причина в том, что выход $y(t) = x_1(t) = e^t x_1(0)$ не зависит от входа u .

Пример 12.7. Рассмотрим электромотор из упражнения 1.12 и примера 12.4. Уравнения в пространстве состояний у него следующие:

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + \rho - cx_1x_3,$$

$$\dot{x}_3 = \theta x_1x_2,$$

где x_3 — угловая скорость, а $x_{1,2}$ — токи в различных обмотках. Чтобы управлять скоростью, возьмем $y = x_3$. Производные будут задаваться равенствами

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_3 = \theta x_1x_2, \\ \ddot{y} &= \theta x_1\dot{x}_2 + \theta\dot{x}_1x_2 = \\ &= \theta x_1[-(a+b)x_2 + \rho - cx_1x_3] + \theta x_2u. \end{aligned}$$

Система имеет относительный порядок 2 в области $D_0 = \{x \in R^3 \mid x_2 \neq 0\}$.

Пример 12.8. Рассмотрим линейную систему с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0},$$

где $m < n$ и $b_m \neq 0$. В пространстве состояний ее можно описать уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

где

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n}, \quad B' = [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times n},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Можно считать, что это специальный случай уравнений (136 с.59),(137 с.59) при $f(x) = Ax$, $g = B$, $h(x) = Cx$. Чтобы выяснить относительный порядок системы, вычисляем производные выхода. Первая производная — это

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Если $m = n - 1$, то $CB = b_{n-1} \neq 0$ и относительный порядок равен 1. Если же $CB = 0$, то мы продолжаем вычислять производные:

$$CA^{i-1}B = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m - 1, \\ CA^{n-m-1}B = b_m \neq 0.$$

Таким образом, u возникает в первый раз в уравнении для $y^{(n-m)}$:

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu,$$

и относительный порядок равен $n - m$, то есть разнице степеней числителя и знаменателя $H(s)$.

Для дальнейшего исследования линеаризуемых систем и вопросов внутренней устойчивости, начнем с только что разобранный линейного примера. Передаточную функцию $H(s)$ можно переписать в виде

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

где $\deg D = n$, $\deg N = m < n$. Представим знаменатель в виде

$$D(s) = Q(s)N(s) + R(s),$$

где $Q(s)$ — частное, а $R(s)$ — остаток при делении многочлена $D(s)$ на $N(s)$. Тогда $\deg Q = n - m \stackrel{\text{def}}{=}$

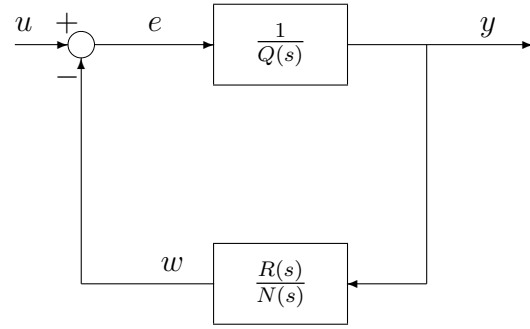


Рис. 1: Представление $H(s)$ обратной связью.

r , $\deg R < m$, и старший коэффициент $Q(s)$ равен $1/b_m$. Следовательно,

$$H(s) = \frac{N(s)}{Q(s)N(s) + R(s)} = \frac{\frac{1}{Q(s)}}{1 + \frac{1}{Q(s)} \frac{R(s)}{N(s)}}.$$

Таким образом, мы представили $H(s)$ в виде блока, замкнутого отрицательной обратной связью, как показано на рис. 1. Передаточная функция r -го порядка $1/Q(s)$ не имеет нулей и может быть реализована уравнением в пространстве состояний

$$\dot{\xi} = (A_c + B_c \lambda') \xi + B_c b_m e, \\ y = C_c \xi$$

с фазовым вектором

$$\xi = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(r-1)}]'$$

где (A_c, B_c, C_c) — каноническое представление цепочки из r интеграторов. Пусть (A_0, B_0, C_0) — минимальное представление передаточной функции $R(s)/N(s)$:

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + B_0 y, \\ w = C_0 \eta,$$

где $e = u - w$. Заметим, что собственные числа A_0 — это нули многочлена $N(s)$, то есть нули передаточной функции $H(s)$. Таким образом, эта передаточная функция реализуется уравнениями

$$\dot{\eta} = A_0 \eta + B_0 C_c \xi, \quad (140)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c (\lambda' \xi - b_m C_0 \eta + b_m u), \quad (141)$$

$$y = C_c \xi. \quad (142)$$

Из специального вида (A_c, B_c, C_c) следует, что

$$y^{(r)} = \lambda' \xi - b_m C_0 \eta + b_m u.$$

Линеаризующая обратная связь

$$u = \frac{1}{b_m} [-\lambda' \xi + b_m C_0 \eta + v]$$

приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c \xi, \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c v, \\ y &= C_c \xi, \end{aligned}$$

у которой отображение вход-выход — цепочка из r интеграторов. Предположим, что требуется стабилизировать ξ в точке $\xi^* = (y_R, 0, \dots, 0)'$. Сдвиг точки равновесия в начало координат заменой переменных $\zeta = \xi - \xi^*$ сводит задачу к стабилизации системы $\dot{\zeta} = A_c \zeta + B_c v$. Взяв $v = K \zeta = K(\xi - \xi^*)$, где матрица K выбрана так, чтобы обеспечить гурвицевость $A_c + B_c K$, завершаем выбор закона управления в виде

$$u = \frac{1}{b_m} [-\lambda' \xi + b_m C_0 \eta + K(\xi - \xi^*)].$$

Уравнения замкнутой системы будут

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c (\xi^* + \zeta), \\ \dot{\zeta} &= (A_c + B_c K) \zeta. \end{aligned}$$

Поскольку матрица $A_c + B_c K$ гурвицева, для любого начального состояния получаем $\zeta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то есть $y(t) \rightarrow y_R$. Что касается η , то для его ограниченности необходима гурвицевость A_0 , то есть нули $H(s)$ должны лежать в открытой левой полуплоскости. Таким образом, мы пришли к требованию *минимальной фазовости* исходной системы. Разумеется, минимальная фазовость не является необходимым условием стабилизируемости, но при выбранном подходе (слежение только за выходом и его производными) неминимально фазовые системы будут неустойчивы.

Попробуем получить нелинейную версию уравнений (140 с.60)-(142 с.60) для системы (136 с.59),(137 с.59) с относительным порядком r . Аналог (141 с.60) уже обеспечен по определению относительного порядка, осталось добиться, чтобы в оставшиеся уравнения системы управление не

входило. Искомая замена переменных, приводящая (136 с.59),(137 с.59) к желательному виду, может быть представлена так:

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\phi_{n-r}(x)}{\psi_1(x)} \\ \vdots \\ \psi_r(x) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (143)$$

где ψ_i уже определены из (139 с.59), а ϕ_j следует определить таким образом, чтобы отображение $T(x)$ было диффеоморфизмом на $D_x \subset D_0$ и

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x} g(x) = 0 \quad \forall x \in D_x, \quad i = 1, 2, \dots, n-r. \quad (144)$$

В разделе 12.4 будет показано, что искомый диффеоморфизм существует в некоторой окрестности произвольной точки $x_0 \in D_0$. Условие (144) обеспечивает сокращение u в уравнении $\dot{\eta} = (\partial \phi / \partial x)[f(x) + g(x)u]$, поэтому замена переменных (143) приводит (136 с.59),(137 с.59) к виду

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (145)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)], \quad (146)$$

$$y = C_0 \xi, \quad (147)$$

где $\xi \in R^r$, $\eta \in R^{n-r}$, (A_c, B_c, C_c) — каноническое представление цепочки интеграторов,

$$f_0(\eta, \xi) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)}, \quad (148)$$

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial \psi_r / \partial x)g(x)}, \quad \alpha(x) = \frac{(\partial \psi_r / \partial x)f(x)}{(\partial \psi_r / \partial x)g(x)}. \quad (149)$$

Если положить

$$\alpha_0(\eta, \xi) = \alpha(T^{-1}(z)), \quad \beta_0(\eta, \xi) = \beta(T^{-1}(z)),$$

то (146) можно переписать в новых координатах

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \beta_0^{-1}(\eta, \xi)[u - \alpha_0(\eta, \xi)].$$

Если x^* — точка равновесия разомкнутой системы (136 с.59), то (η^*, ξ^*) — точка равновесия (145),(146), где

$$\eta^* = \phi(x^*), \quad \xi^* = [h(x^*) \ 0 \ \dots \ 0].$$

Если y обращается в ноль при $x = x^*$, то есть $h(x^*) = 0$, мы можем преобразовать x^* в начало координат ($\eta = 0, \xi = 0$), выбрав такое $\phi(x)$, что $\phi(x^*) = 0$.

Уравнения (145 с.61)-(147 с.61) называются *нормальной формой*. Эта форма осуществляет декомпозицию системы на внешнюю часть с вектором состояния ξ и внутреннюю с состоянием η . Внешняя часть линеаризуется обратной связью

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

а внутренняя часть этой обратной связью превращается в ненаблюдаемую. Внутренняя динамика описывается уравнением (145 с.61). Положив там $\xi = 0$, получаем уравнение

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (150)$$

которое называется уравнением *нулевой динамики*. Система называется *минимально фазовой*, если в рассматриваемой области уравнение (150) имеет асимптотически устойчивую точку равновесия.

Нулевую динамику можно и полезно описать в исходных x -координатах. Действительно,

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow \xi(t) \equiv 0 \Rightarrow u(t) \equiv \alpha(x(t)).$$

Таким образом, нулевой выход возможен, если решение уравнений системы принадлежит множеству

$$Z^* = \{x \in D_0 | \psi_1(x) = \psi_2(x) = \dots = \psi_r(x) = 0\},$$

и

$$u = u^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(x)|_{x \in Z^*}.$$

При этом движение системы описывается уравнением

$$\dot{x} = f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} [f(x) + g(x)\alpha(x)]|_{x \in Z^*}.$$

Пример 12.9. Рассмотрим управляемое уравнение Ван дер Поля

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

Выше (пример 12.5) показано, что относительный порядок этой системы равен единице. Взяв $\xi = y$

и $\eta = x_1$ мы видим, что система уже записана в нормальной форме. Нулевая динамика задается уравнением $\dot{x}_1 = 0$, то есть система не минимально фазовая.

Пример 12.10. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2}u, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_3 + u, \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

с точкой равновесия в начале координат. Производные выхода удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_2 = x_3, \\ \ddot{y} &= \dot{x}_3 = x_1x_3 + u. \end{aligned}$$

Следовательно, система имеет относительный порядок 2 в R^3 . Мы имеем $\psi_1(x) = x_2, \psi_2(x) = x_3$. Используя (149 с.61), получаем

$$\beta = 1, \alpha(x) = -x_1x_3.$$

Для описания нулевой динамики, ограничим x множеством

$$Z^* = \{x \in R^3 | x_2 = x_3 = 0\}$$

и возьмем $u = u^*(x) = 0$. Это приводит к уравнению

$$\dot{x}_1 = -x_1,$$

что показывает минимальную фазовость системы. Чтобы привести систему к нормальной форме, нам нужно выбрать такую функцию $\phi(x)$, что

$$\phi(0) = 0, \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$$

и

$$T(x) = [\phi(x) \ x_2 \ x_3]'$$

— диффеоморфизм в некоторой окрестности начала координат. Решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

методом разделения переменных приводит к функции

$$\phi(x) = -x_1 + x_3 + \operatorname{arctg} x_3,$$

которая удовлетворяет условию $\phi(0) = 0$. Отображение $T(x)$ — глобальный диффеоморфизм, поскольку уравнение $T(x) = z$ однозначно непрерывно разрешимо для любого $z \in R^3$. Таким образом, нормальная форма

$$\dot{\eta} = (-\eta + \xi_2 + \operatorname{arctg} \xi_2) \left(1 + \frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 \right),$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_1 = (-\eta + \xi_2 + \operatorname{arctg} \xi_2) \xi_2 + u,$$

$$y = \xi_1$$

определена глобально.

Пример 12.11. Индукционный мотор из примера 12.7 имеет относительный порядок 2 в области $D_0 = \{x \in R^3 \mid x_2 \neq 0\}$. Функции ψ_1 и ψ_2 определяются равенствами $\psi_1(x) = x_3$, $\psi_2(x) = \theta x_1 x_2$. Из (149 с.61) получаем $\beta = 1/\theta x_2$,

$$\alpha(x) = \frac{\theta x_2(-ax_1) + \theta x_1(-bx_2 + \rho - cx_1 x_3)}{\theta x_2}.$$

Чтобы описать нулевую динамику, ограничим x множеством

$$\begin{aligned} Z^* &= \{x \in D_0 \mid x_3 = 0, x_1 x_2 = 0\} = \\ &= \{x \in D_0 \mid x_3 = 0, x_1 = 0\} = \end{aligned}$$

и возьмем $u = u^*(x) = 0$. Тогда

$$\dot{x}_2 = -bx_2 + \rho.$$

Поскольку уравнение нулевой динамики имеет асимптотически устойчивую точку равновесия при $x_2 = \rho/b$, система минимально фазовая. Чтобы привести ее к нормальной форме, нужно отыскать такую функцию $\phi(x)$, что $[\partial\phi/\partial x]g = \partial\phi/\partial x_1 = 0$ и $T = [\phi(x), x_3, \theta x_1 x_2]'$ — диффеоморфизм на некоторой области $D_x \subset D_0$. Этим требованием при $D_x = \{x \in R^3 \mid x_2 > 0\}$ отвечает функция $\phi(x) = x_2 - \rho/b$, переводящая точку равновесия в начало координат.

Пример 12.12. Рассмотрим нелинейную систему со скалярными выходом и входом:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= p(z, \dot{z}, \dots, z^{(m-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + \\ &+ q(z, \dot{z}, \dots, z^{(m-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) z^{(m)}, \end{aligned} \quad (151)$$

где $m < n$, z — вход, y — выход, и в представляющей интерес области $p(\cdot), q(\cdot)$ — достаточно гладкие функции, причем $q(x) \neq 0$. Определим $u = z^{(m)}$ как новый вход, а младшие производные z включим в вектор состояния:

$$\zeta = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \end{bmatrix},$$

$$\dot{\zeta} = A_u \zeta + B_u u,$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c [p(x) + q(x)u],$$

$$y = C_c \xi,$$

где (A_c, B_c, C_c) — каноническая форма представления цепочки из n интеграторов наподобие (132 с.53), (135 с.58), а (A_u, B_u) — каноническая управляемая пара в представлении (132 с.53) цепочки из m интеграторов. Пусть $D \subset R^{n+m}$ — некоторая область, где $q \neq 0$. Ясно, что

$$y^{(i)} = C_c A_c^i \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad y^{(n)} = p(x) + q(x)u.$$

Следовательно, система имеет относительный порядок n . Для определения нулевой динамики заметим, что $\psi_i(x) = \xi_i$. Следовательно, $Z^* = \{x \in R^{n+m} \mid \xi = 0\}$ и $u^*(x) = -p(x)/q(x)$, вычисленное при $\xi = 0$. Таким образом, нулевая динамика задается уравнением

$$\dot{\zeta} = A_u \zeta + b_u u^*(x).$$

Вспоминая определение ζ , легко видеть, что $\zeta_1 = z$ удовлетворяет дифференциальному уравнению порядка m

$$\begin{aligned} 0 &= p(z, \dot{z}, \dots, z^{(m-1)}, 0, 0, \dots, 0) + \\ &+ q(z, \dot{z}, \dots, z^{(m-1)}, 0, 0, \dots, 0) z^{(m)}, \end{aligned} \quad (152)$$

которое получается из (151) при $y(t) \equiv 0$. В линейном случае это уравнение имеет в качестве характеристического многочлена числитель исходной передаточной функции. Минимальная фазовость определяется изучением свойств (152). Для перехода к нормальной форме нужно заметить, что ξ уже содержит y и его производные, остается найти такую функцию $\phi = \phi(\zeta, \xi) : R^{n+m} \rightarrow R^m$, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} B_u + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} B_c q(x) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta_m} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_n} q(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (153)$$

В некоторых специальных случаях у этих уравнений в частных производных имеются очевидные решения. Например, если q — постоянная величина, то можно взять

$$\phi_i = \zeta_i - \frac{1}{q} \xi_{n-m+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Другой случай рассматривается в упражнении 12.11.

0.4 Обратные связи по состоянию.

0.4.1 Стабилизация

Рассмотрим линеаризуемую по состоянию систему

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)], \quad z = T(x),$$

где $T(x)$ — диффеоморфизм на $D_x \subset R^n$, $D_z = T(D_x)$ содержит начало координат, пара (A, B) вполне управляема, матрица $\beta(x)$ не вырождена при всех $x \in D_x$, и обе матрицы $\alpha(x), \beta(x)$ непрерывно дифференцируемы. Построим такую матрицу K , что $A + BK$ — гурвицева матрица. Обратная связь

$$u = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)$$

приводит к линейному уравнению замкнутой системы

$$\dot{z} = (A + BK)z.$$

Рассмотрим вопрос о чувствительности. На практике регулятор скорее всего будет задаваться уравнением

$$u = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x),$$

где функции $\alpha(x), \hat{\beta}(x), \hat{T}(x)$ отличаются от номинальных. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B\beta^{-1}(x)[\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x)] = \\ &= (A + BK)z + B\delta(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta(z) &= \beta^{-1}(x)\{\hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\hat{\beta}(x) - \beta(x)]KT(x) + \\ &+ \hat{\beta}(x)K[\hat{T}(x) - T(x)]\}, \quad x = T^{-1}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение замкнутой системы можно рассматривать как результат возмущения системы номинальной, то есть $\dot{z} = (A + BK)z$. Проанализируем устойчивость. Пусть $P + P' > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$P(A + BK) + (A + BK)'P = -Q,$$

где $Q = Q' < 0$. Предположим, что в окрестности начала координат $\|\beta(z)\|_2 \leq \gamma_1 \|z\|_2 + \gamma_2$ для некоторых положительных величин $\gamma_{1,2}$. Используя функцию Ляпунова $V(z) = z'Pz$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= -z'Qz + 2z'PB\delta(z) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_1\|z\|_2^2 + \\ &+ 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2. \end{aligned}$$

Если $\gamma_1 < \lambda_{\min}(Q)/4\|PB\|_2$, то

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2\gamma_2\|z\|_2 \leq \\ &\leq -\frac{1}{4}\lambda_{\min}(Q)\|z\|_2^2 \quad \forall \|z\|_2 \geq \frac{8\|PB\|_2\gamma_2}{\lambda_{\min}(Q)}, \end{aligned}$$

откуда следует диссипативность (предельная ограниченность) с пропорциональным γ_2 радиусом диссипативности. Если $\delta(0) = 0$, то можно взять $\gamma_2 = 0$. В этом случае начало координат будет асимптотически устойчиво при $\gamma_1 < \lambda_{\min}(Q)/2\|PB\|_2$.

Пример 12.13. Рассмотрим маятник

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin(x_1 + \delta_1) - bx_2 + cu, \end{aligned}$$

где $x_1 = \theta - \delta_1$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = T$ — входной момент. Цель управления — стабилизация при $\theta = \delta_1$. Линеаризующая и стабилизирующая обратная связь задается уравнением

$$u = \left(\frac{a}{c}\right) \sin(x_1 + \delta_1) + \left(\frac{1}{c}\right) (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где коэффициенты $k_{1,2}$ выбраны таким образом, что

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - b \end{bmatrix}$$

— гурвицева матрица. Предположим, что из-за неопределенности относительно значений параметров a и c управляющее воздействие вычисляется по формуле

$$u = \left(\frac{\hat{a}}{\hat{c}} \right) \sin(x_1 + \delta_1) + \left(\frac{1}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2),$$

где \hat{a} и \hat{c} — приближенные значения параметров. Замкнутую систему будет описывать уравнение

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + (k_2 - b)x_2 + \delta(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \left(\frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right) \sin(x_1 + \delta_1) + \\ &+ \left(\frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right) (k_1 x_1 + k_2 x_2). \end{aligned}$$

Ошибка глобально удовлетворяет неравенству $|\delta(x)| \leq \gamma_1 \|x\|_2 + \gamma_2$, где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| + \left| \frac{c - \hat{c}}{\hat{c}} \right| \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \gamma_2 &= \left| \frac{\hat{a}c - a\hat{c}}{\hat{c}} \right| |\sin \delta_1|. \end{aligned}$$

Пусть

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

— решение уравнения Ляпунова $P(A+BK) + (A+BK)'P = -I$. Если

$$\gamma_1 < \frac{1}{4\sqrt{p_{12}^2 + p_{22}^2}},$$

то замкнутая система глобально диссипативна с радиусом, пропорциональным γ_2 . Если $\sin \delta_1 = 0$, то приведенная оценка для γ_1 гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость.

Приведенные рассуждения применимы к любой системе вида

$$\dot{z} = (A + BK)z + \Delta(z)$$

и не учитывают, что в нашем случае $\Delta(z) = B\delta(z)$ (говорят, что при этом выполнено *условие соответствия*). Способ учесть это условие будет рассмотрен в разделах 13.1 и 13.3.

Рассмотрим теперь частично линеаризованную систему

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (154)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)], \quad (155)$$

где

$$z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix},$$

$T(x)$ — диффеоморфизм на области $D_x \subset R^n$, $D_z = T(D_x) \ni 0$, (A, B) — управляемая пара, $\beta(x)$ не вырождается при всех $x \in D_x$, $f_0(0, 0) = 0$, а функции $f_0(\eta, \xi)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ непрерывно дифференцируемы. Эти уравнения имеют вид нормальной формы (145 с.61)-(147 с.61), однако уравнение наблюдения отброшено, вход может быть векторным, а пара (A, B) не обязательно каноническая. Обратная связь

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

приводит уравнения (154),(155) к "треугольному" виду

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (156)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv. \quad (157)$$

Уравнение (157) легко стабилизировать обратной связью $v = K\xi$, выбрав K таким образом, чтобы матрица $A + BK$ была гурвицевой. Асимптотическая устойчивость нулевого решения всей замкнутой системы

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi), \quad (158)$$

$$\dot{\xi} = (A + BK)\xi \quad (159)$$

определяется устойчивостью "вход-состояние" уравнения (158), входом которого служит ξ . Результаты раздела 5.3 говорят о том, что локальная устойчивость "вход-состояние" имеет место в том случае, если асимптотически устойчиво невозмущенное уравнение

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0). \quad (160)$$

Таким образом, минимально фазовая вход-выход-линеаризуемая система стабилизируется обратной связью от состояния

$$u = \alpha(x) + \beta(x)KT_2(x). \quad (161)$$

Важно, что эта обратная связь формируется через $\alpha(x), \beta(x), T_2(x)$ без использования $T_1(x)$. Дело в том, что $\alpha(x), \beta(x)$ и $T_2(x)$ определяются по функциям f, g, h , в то время как $T_1(x)$ зависит еще от выбора функции $\phi(x)$, которая должна удовлетворять уравнению в частных производных (144 с.61).

Чувствительность к неопределенности коэффициентов исследуется так же, как это уже было сделано для систем, линеаризуемых по состоянию.

Глобальная стабилизация не вытекает из "глобальной" минимальной фазовости, для этого в добавок к глобальной экспоненциальной устойчивости уравнения (160 с.65) нужно еще, чтобы функция $f_0(\eta, \xi)$ была глобально липшицева по всем переменным — это следует из пропущенной пока что леммы 5.5. Если эти условия не выполнены, то устойчивость "вход-состояние" нужно исследовать другими дополнительными. Проблемы, возникающие при отсутствии глобальной липшицевости (называемой еще *условием линейного роста*), поясняются двумя нижеследующими примерами.

Пример 12.14. Рассмотрим систему второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + \eta^2 \xi, \\ \dot{\xi} &= v.\end{aligned}$$

Хотя уравнение $\dot{\eta} = -\eta$ глобально экспоненциально устойчиво, система $\dot{\eta} = -\eta + \eta^2 \xi$, как легко показать, вход-состояние устойчива только локально. Таким образом, при $\gamma > 0$ линейная обратная связь $v = -\gamma \xi$ локально стабилизирует всю систему. На самом деле она даже экспоненциально устойчива. При $v = \eta \xi$ мы имеем

$$\dot{v} = \eta \dot{\xi} + \dot{\eta} \xi = -\gamma \eta \xi - \eta \xi + \eta^2 \xi^2 = -(1 + \gamma)v + v^2.$$

Следовательно, гипербола $\eta \xi = 1 + \gamma$ состоит из двух траекторий. Аналитическое решение уравнений замкнутой системы позволяет показать, что областью притяжения начала координат служит множество $\{\eta \xi < 1 + \gamma\}$. При увеличении γ оно накрывает любой компакт, так что обратная связь $v = -\gamma \xi$ обеспечивает полуглобальную устойчивость.

Если нулевое решение уравнения $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ глобально асимптотически устойчиво, то возникает желание обеспечить глобальную (или хо-

тя бы полуглобальную) устойчивость треугольной системы (156 с.65), (157 с.65), располагая собственные числа матрицы $(A + BK)$ все левее и левее. Упражнение 12.17 показывает, что иногда этот подход срывается. Вообще говоря, он все-таки не гарантирует стабилизации:

Пример 12.15. Рассмотрим систему порядка три

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(1 + \xi_2)\eta^3, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= v.\end{aligned}$$

Линейная обратная связь

$$v = -\gamma^2 \xi_1 - 2\gamma \xi_2 \stackrel{\text{def}}{=} K\xi$$

доставляет собственным числам матрицы

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

значения $-\gamma, -\gamma$. Экспоненциальная матрица

$$e^{t(A+BK)} = \begin{bmatrix} (1 + \gamma t)e^{-\gamma t} & e^{-\gamma t} \\ -\gamma^2 t e^{-\gamma t} & (1 - \gamma t)e^{-\gamma t} \end{bmatrix}$$

стремиться к нулю все быстрее по мере роста γ , обеспечивая такое же убывание ξ при больших значениях времени. При этом, однако, растет амплитуда переходного процесса: левый нижний элемент экспоненциальной матрицы в момент $t = 1/\gamma$ достигает своего максимального значения γ/e . Этот эффект фатально сказывается на устойчивости нелинейной части системы. В частности, при начальных данных $\eta(0) = \eta_0, \xi_1(0) = 1, \xi_2(0) = 0$ мы получаем $\xi_2(t) = -\gamma^2 t e^{-\gamma t}$ и

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}(1 - \gamma^2 t e^{-\gamma t})\eta^3.$$

В течение переходного периода коэффициент при η^3 положителен, что вызывает рост $|\eta(t)|$. В конце-концов коэффициент станет отрицательным, но этот момент может прийти слишком поздно, поскольку система может иметь конечное время существования. Действительно, точное решение удовлетворяет равенству

$$\eta^2(t) = \frac{\eta_0^2}{1 + \eta_0^2 [t + (1 + \gamma t)e^{-\gamma t} - 1]},$$

поэтому при $\eta_0^2 > 1$ и достаточно большом γ решение не будет продолжимо далее некоторого конечного момента.

Линеаризация обратной связью оправдана не всегда. Она полезна, поскольку для линейных систем мы уже знаем методику построения регуляторов, но эта причина чисто математическая, а не содержательная. Подавляемая нелинейность на самом деле может быть полезна, как показывает

Пример 12.16. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u$$

с положительными коэффициентами a, b . Линеаризующе-стабилизирующая обратная связь

$$u = -(\gamma + a)x + bx^3, \quad \gamma > 0$$

приводит к уравнению $\dot{x} = -\gamma x$. Она давит кубическую нелинейность, но делать это не нужно — если мы просто возьмем

$$u = -(\gamma + a)x,$$

то придем к уравнению

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3,$$

решения которого стремятся к нулю быстрее, чем решения $\dot{x} = -\gamma x$.

0.4.2 Отслеживание.

Рассмотрим представленную в нормальной форме (145 с.61)-(147 с.61) вход-выход линеаризуемую систему со скалярными выходом и входом

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi), \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \frac{1}{\beta(x)} [u - \alpha(x)], \\ y &= C_c \xi. \end{aligned}$$

Без потери общности будем считать, что $f_0(0, 0) = 0$. Требуется построить такое управление, чтобы выход y асимптотически отслеживал задающее воздействие $y_R(t)$. Предполагается, что

- функция $y_R(t)$ и ее производные до порядка r ограничены при всех $t \geq 0$, а $y_R^{(r)}(t)$ кусочно непрерывна;

- сигналы $y_R(t), \dots, y_R^{(r)}(t)$ доступны измерению.

Если относительный порядок системы максимальный, то она не имеет нетривиальной нулевой динамики. В этом случае уравнения для η нужно отбросить, а остальные рассуждения останутся в силе. Пусть

$$\mathcal{Y}_R = \begin{bmatrix} y_R \\ \vdots \\ y_R^{(r-1)} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \xi_1 - y_R \\ \vdots \\ \xi_r - y_R^{(r-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{Y}_R.$$

Замена переменных $e = \xi - \mathcal{Y}_R$ влечет

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R), \\ \dot{e} &= A_c e + B_c \left\{ \frac{1}{\beta(x)} [u - \alpha(x)] - y_R^{(r)} \right\}. \end{aligned}$$

Обратная связь $u = \alpha(x) + \beta(x)[v + y_R^{(r)}]$ приводит нормальную форму к каскадному виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R), \\ \dot{e} &= A_c e + B_c v. \end{aligned}$$

Поставленная цель управления достигается, если v стабилизирует уравнение для e , обеспечивая при этом ограниченность $\eta(t)$. Линейная обратная связь $v = Ke$, где K выбрано из соображений гурвицевости матрицы $A + BK$, в исходных терминах описывается уравнением

$$u = \alpha(x) + \beta(x) \left\{ K [T_2(x) - \mathcal{Y}_R] + y_R^{(r)} \right\}, \quad (162)$$

где T_2 — последние r компонент диффеоморфизма $T(x)$, который приводит систему к нормальной форме. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R), \quad (163)$$

$$\dot{e} = (A_c + B_c K)e. \quad (164)$$

В случае минимально фазовой системы уравнение $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ локально вход-состояние устойчиво. Следовательно, при достаточно малых начальных данных и задающем воздействии \mathcal{Y}_R функция $\eta(t)$ будет ограниченной. Таким образом, обратная связь (162) решает задачу отслеживания локально. Для глобального отслеживания достаточно, чтобы уравнение $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ было глобально устойчиво от входа к состоянию. При этом возникают те же проблемы, что и при стабилизации.

0.5 Обратный ход (backstepping).

Начнем со специального случая *обратного хода для интегратора*. Рассмотрим систему

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \quad (165)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad (166)$$

где $(\eta', \xi) \in R^{n+1}$ — состояние, а $u \in R$ — управление. Функции $f : D \rightarrow R^n$ и $g : D \rightarrow R^n$ — бесконечно гладкие⁴ в области $D \subset R^n$, содержащей начало координат, и $f(0) = 0$. Требуется построить стабилизирующую обратную связь (по состоянию). Рассматриваемую систему можно представить блок-схемой на рис. 2,(а). Предположим, что подсистему (165) можно стабилизировать гладкой обратной связью $\xi = \phi(\eta)$, где $\phi(0) = 0$. Это означает, что нулевое решение системы

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

асимптотически устойчиво. Предположим, что известна гладкая положительно определенная функция Ляпунова $V(\eta)$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \quad \forall \eta \in D, \quad (167)$$

где $W(\eta)$ — положительно определенная функция. Добавляя и вычитая $g(\eta)\phi(\eta)$ к правой части (165), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)[\xi - \phi(\eta)], \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned}$$

что соответствует рис. 2,(b). Замена переменных

$$z = \xi - \phi(\eta)$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z, \\ \dot{\xi} &= u - \dot{\phi}, \end{aligned}$$

как показано на рис. 2,(c). Переход от рис. 2,(а) к рис. 2,(c) можно рассматривать как выведение

⁴— для простоты, на самом деле достаточно существование нескольких производных.

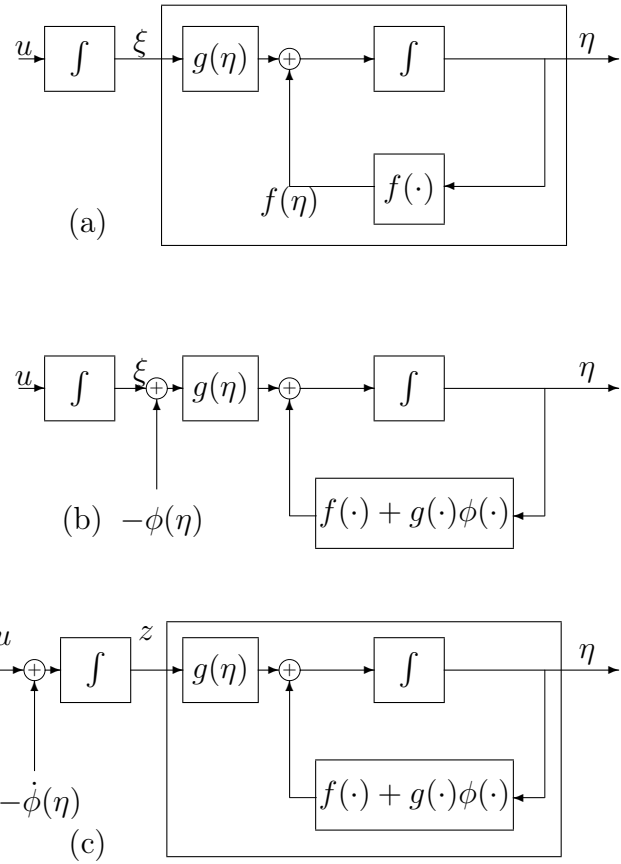


Рис. 2: (а) — (165),(166), (b) — введение $\psi(\eta)$, (c) — выведение $\psi(\eta)$ "обратным ходом" за интегратор.

"обратным ходом" $-\dot{\phi}(\eta)$ за интегратор. Поскольку функции f, g и ϕ известны, производная от ϕ по времени может быть определена из равенства

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi].$$

Обозначив $v = u - \dot{\phi}$, приводим систему к каскадному виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z, \\ \dot{z} &= v, \end{aligned}$$

который отличается от исходного представления системы тем, что нулевое решение первого уравнения асимптотически устойчиво при нулевом входе. Это свойство можно использовать при синтезе управления v , стабилизирующего всю систему. Используя

$$V_a(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$$

как функцию Ляпунова, получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv \leq \\ &\leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + zv.\end{aligned}$$

Выбор

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - kz, \quad k > 0$$

гарантирует неравенство

$$\dot{V}_a \leq -W(\eta) - kz^2,$$

что доказывает асимптотическую устойчивость нулевого решения замкнутой системы. Подставляя v, z и $\dot{\psi}$, в исходных терминах получаем обратную связь

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)]. \quad (168)$$

Если все условия выполнены глобально и функция $V(\eta)$ радиально неограничена, получаем глобальную асимптотическую устойчивость. Подводя итог, получаем следующую лемму.

Лемма 13.2. *Рассмотрим систему (165 с.68), (166 с.68). Пусть $\phi(\cdot)$ — такая функция, что $\phi(0) = 0$ и обратная связь $\xi = \phi(\eta)$ стабилизирует замкнутую систему, и функция Ляпунова $V(\eta)$ удовлетворяет неравенству (167 с.68) с некоторой положительно определенной функцией $W(\eta)$. Тогда обратная связь (168) стабилизирует нулевое решение системы (165 с.68), (166 с.68) с функцией Ляпунова $V(\eta) + [\xi - \phi(\eta)]^2/2$. Если же все условия выполнены глобально и функция $V(\eta)$ радиально неограничена, то имеет место глобальная асимптотическая устойчивость.*

Пример 13.6. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

имеющий вид (165 с.68), (166 с.68) с $\eta = x_1$, $\xi = x_2$. Скалярная подсистема

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

с входом x_2 стабилизируется обратной связью

$$x_2 = \phi(x_1) \stackrel{\text{def}}{=} -x_1^2 - x_1,$$

поскольку при этом

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$$

и функция $V(x_1) = x_1^2/2$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2 \quad \forall x_1 \in R.$$

Следовательно, по лемме 13.2 управление

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [x_1^2 - x_1^3 + x_2] - \frac{\partial V}{\partial x_1} - [x_2 - \phi(x_1)] = \\ &= -2(x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1)\end{aligned}$$

глобально стабилизирует систему с функцией Ляпунова

$$V_a(x) = x_1^2/2 + (x_2 + x_1^2 + x_1)^2/2.$$

Пример 13.7. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= u,\end{aligned}$$

которая от предыдущей отличается лишним интегратором. После первого шага обратным ходом мы получаем, что первые два уравнения (с входом x_3) стабилизируются обратной связью

$$\begin{aligned}x_3 &= -2(x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - \\ &- (x_2 + x_1^2 + x_1) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x_1, x_2)\end{aligned}$$

с соответствующей функцией Ляпунова. Рассматриваемая система имеет вид (165 с.68), (166 с.68) при $\xi = x_3$

$$\eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Применив лемму 13.2 получаем, что обратная связь

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} [x_1^2 - x_1^3 + x_2] + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} x_3 - \\ &- \frac{\partial V}{\partial x_2} - [x_3 - \phi(x_1, x_2)]\end{aligned}$$

глобально стабилизирует систему с функцией Ляпунова

$$V_a(x) = \frac{x_1^2 + (x_2 + x_1^2 + x_1)^2 + [x_3 - \phi(x_1, x_2)]^2}{2}.$$

Перейдем теперь от (165 с.68),(166 с.68) к более общему виду системы

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi, \quad (169)$$

$$\dot{\xi} = f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi)u, \quad (170)$$

где f_a, g_a — достаточно гладкие функции. Если в рассматриваемой области $g_a(\eta, \xi) \neq 0$, выбор управления в виде

$$u_a = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)}[u_a - f_a(\eta, \xi)] \quad (171)$$

приводит (170) к уравнению интегратора $\dot{\xi} = u_a$. Таким образом, если для подсистемы (169) существует стабилизирующая обратная связь $\xi = \phi(\eta)$ и функция Ляпунова $V(\eta)$, удовлетворяющая условиям леммы 3.2, то вместе с равенством (171) эта лемма гарантирует, что управление

$$u = \phi_a(\eta, \xi) = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] - f_a(\eta, \xi) \right\} \quad (172)$$

при некотором $k > 0$ будет для системы (169),(170) стабилизирующим с функцией Ляпунова

$$V_a(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2. \quad (173)$$

Построение такого управления естественно назвать обратным ходом (backstepping) для произвольной системы (169),(170) по аналогии с вынесением нелинейности за интегратор. Повторяя обратный ход рекурсивно, можно стабилизировать так называемые "strict-feedback" системы, которые описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2, \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + \\ &\quad + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1})z_k, \\ \dot{z}_k &= f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g_k(x, z_1, \dots, z_k)u. \end{aligned}$$

Здесь $x \in R^n, z_1, \dots, z_k$ — скалярные величины, $f_{1, \dots, k}(0) = 0$. Будем предполагать, что в интересующей нас области

$$g_i(x, z_1, \dots, z_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Рекурсивная процедура начинается с подсистемы

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1,$$

входом которой служит z_1 . Предполагается известной такая функция $\phi_0(x)$, что $\phi_0(0) = 0$ и обратная связь $z_1 = \phi_0(x)$ стабилизирует систему с функцией Ляпунова $V_0(x)$, для которой в рассматриваемой области справедливы неравенства

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leq -W(x)$$

с положительно определенной функцией W . Для множества приложений переменная x скалярна, что кардинально упрощает проблему стабилизации. Располагая функциями $\phi_0(x)$ и $V_0(x)$, мы можем уже применять обратный ход единообразно. Во-первых, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \end{aligned}$$

как частный случай (169),(170) при $\eta = x, \xi = z_1, u = z_2, f = f_0, g = g_0, f_a = f_1, g_a = g_1$. Из (172),(173) получаем стабилизирующую обратную связь и функцию Ляпунова

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z_1) &= \frac{1}{g_1(x, z_1)} \left\{ \frac{\partial \phi_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x)z_1] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0(x) - k_1[z_1 - \phi_0(x)] - f_1(x, z_1) \right\}, \quad k_1 > 0, \end{aligned}$$

$$V_1(x, z_1) = V_0(x) + \frac{1}{2}[z_1 - \phi_1(x)]^2.$$

Теперь мы можем рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2, \\ \dot{z}_2 &= f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \end{aligned}$$

как частный случай (169),(170) при

$$\begin{aligned} \xi &= z_2, \quad u = z_3, \quad f_a = f_2, \quad g_a = g_2, \\ \eta &= \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_0 + g_0 z_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Используя (157 с.65) и (158 с.65), получаем стабилизирующее управление и функцию Ляпунова

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z_1) &= \frac{1}{g_2} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} [f_0 + g_0 z_1] + \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1} [f_1 + g_1 z_2] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V_1}{\partial z_1} g_1 - k_2[z_2 - \phi_1] - f_2 \right\}, \quad k_2 > 0, \end{aligned}$$

$$V_2(x, z_1, z_2) = V_1(x, z_1) + \frac{1}{2}[z_2 - \phi_2(x)]^2.$$

Повторив этот процесс k раз, мы получим стабилизирующую обратную связь для всей системы $u = \phi_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$ и функцию Ляпунова $V_k(x, z_1, z_2, \dots, z_k)$.

Пример 13.8. Рассмотрим систему со скалярными выходом и входом, имеющую специальную нормальную форму

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)z_1, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1} &= z_r, \\ \dot{z}_r &= [u - \alpha(x, z)]/\beta(x, z), \\ y &= z_1,\end{aligned}$$

где $x \in R^{n-1}$, $z_{1,\dots,r}$ — скалярные величины, $\beta(x, z) \neq 0$ при всех (x, z) . (Специфичность нормальной формы в первом уравнении). Поскольку система имеет вид strict-feedback, для ее стабилизации можно применить обратный ход при условии, если имеется достаточно гладкая функция $\phi_0(x)$ и достаточно гладкая радиально неограниченная функция Ляпунова $V_0(x)$, для которых справедливо неравенство

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[f_0(x) + g_0(x)\phi_0(x)] \leq -W(x)$$

с положительно определенной функцией W . Если система минимально-фазовая, нулевое решение уравнения $\dot{x} = f_0(x)$ глобально асимптотически устойчиво и для функции Ляпунова $V_0(x)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} f_0(x) \leq -W(x)$$

с положительно определенной функцией W , то тогда можно взять $\phi_0(x) = 0$. В противном случае следует найти $\phi_0(x)$ и $V_0(x)$. Таким образом, обратный ход позволяет стабилизировать и неминимально-фазовые системы, если разрешима задача стабилизации нулевой динамики.

Пример 13.9. Рассматривая пример 12.14, мы показали, что система второго порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 z, \\ \dot{z} &= u\end{aligned}$$

при достаточно больших $\gamma > 0$ полуглобально стабилизируется обратной связью $u = -\gamma z$. Попробуем получить глобальную стабилизацию с

помощью обратного хода. Для первого уравнения при $\phi_0(x) = 0$ и $V_0(x) = x^2/2$ мы имеем

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[-x + x^2\phi_0(x)] = \frac{\partial V_0}{\partial x}(-x) = -x^2 \forall x \in R.$$

Из (172 с.70) и (173 с.70) получаем

$$u = -(x^3 + kz), \quad k > 0$$

и

$$V(x, z) = (x^2 + z^2)/2.$$

Производная функции V вдоль траекторий замкнутой системы будет

$$\dot{V} = -x^2 - kz^2,$$

откуда следует глобальная экспоненциальная устойчивость.

Пример 13.10. В качестве вариации предыдущего примера рассмотрим систему⁵

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - xz, \\ \dot{z} &= u.\end{aligned}$$

На этот раз первое уравнение не может быть стабилизировано обратной связью $z = \phi_0(x) = 0$. Нетрудно видеть, однако, что использование функций $\phi_0(x) = x + x^2$ и $V_0(x) = x^2/2$ приводит к равенству

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}[x^2 - x\phi_0(x)] = -x^4 \forall x \in R.$$

Из (172 с.70) и (173 с.70) получаем

$$u = (1 + 2x)(x^2 - xz) + x^2 - k(z - x - x^2), \quad k > 0$$

и

$$V(x, z) = [x^2 + (z - x - x^2)^2]/2.$$

Производная функции V вдоль траекторий замкнутой системы будет

$$\dot{V} = -x^4 - k(z - x - x^2)^2,$$

откуда следует глобальная экспоненциальная устойчивость.

⁵С выходом $y = z$ эта система будет неминимально-фазовой, поскольку нулевое решение уравнения нулевой динамики $\dot{x} = x^2$ неустойчиво.