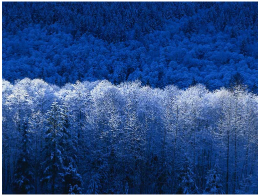
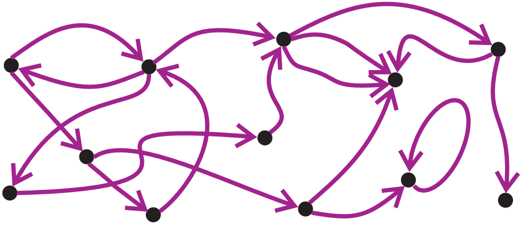
Гибридная динамика информационных и производственных потоков: Динамические переключательные производственные потоковые сети



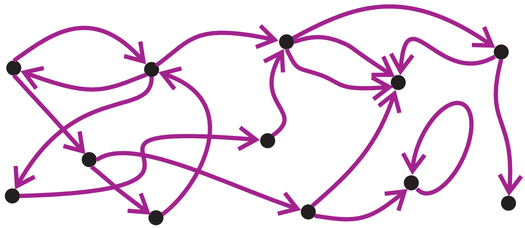
Использованы иллюстрации из
E. Lefeber and J.E. Rooda, Modelling and Analysis of Manufacturing Systems, SE-Report 2006-01, TU/e

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

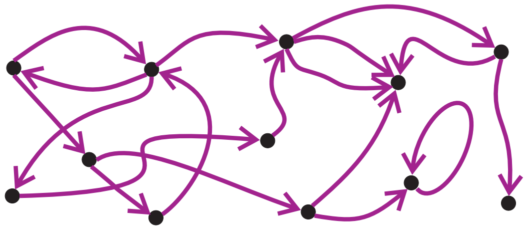


Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



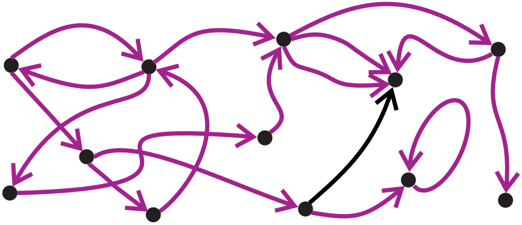
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



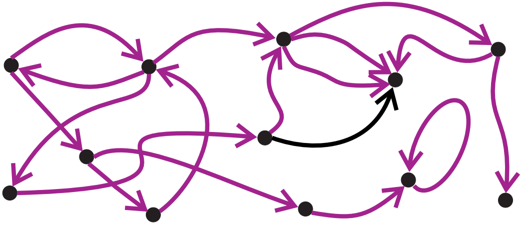
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



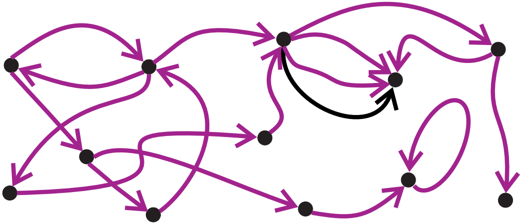
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



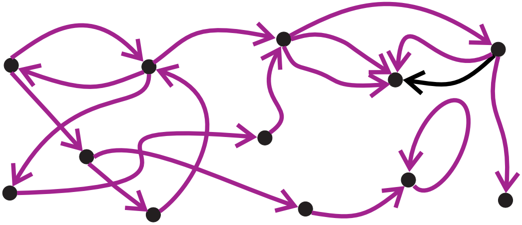
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



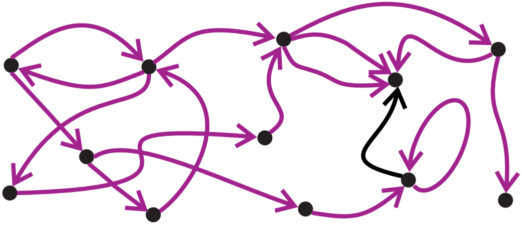
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



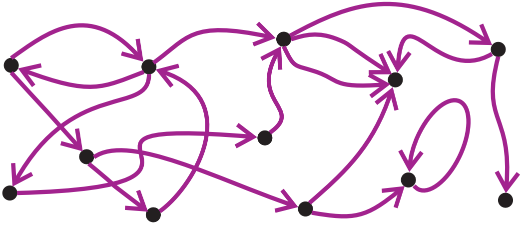
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



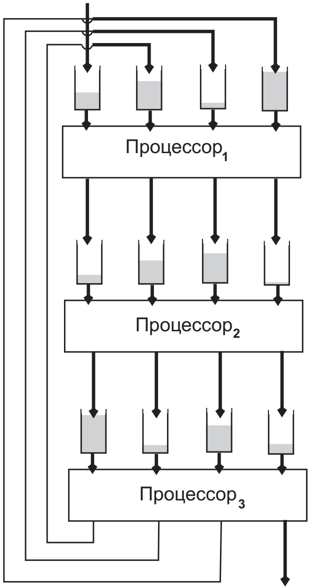
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

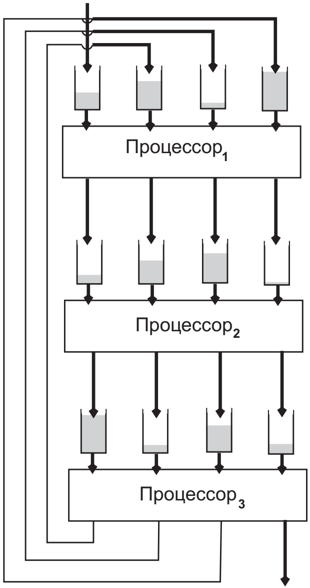


- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени
- Производственная ∼ На узлах передаваемое по сети содержимое подвергается определенной обработке

Функционирнование ДПППС (пример)

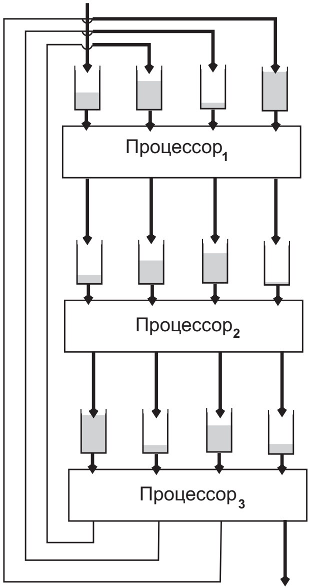


Функционирнование ДПППС (пример)



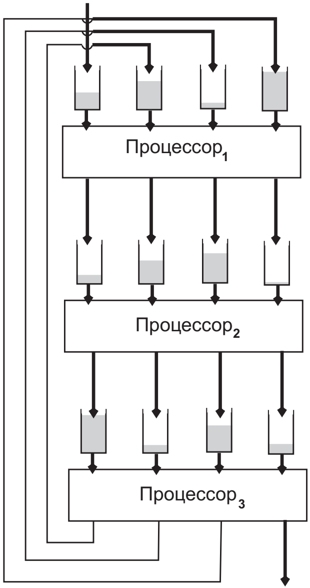
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).

Функционирнование ДППС (пример)



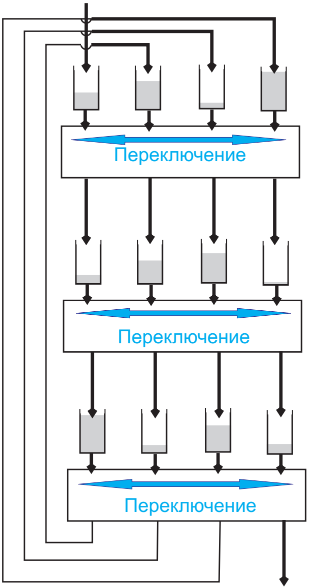
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.

Функционирнование ДПППС (пример)



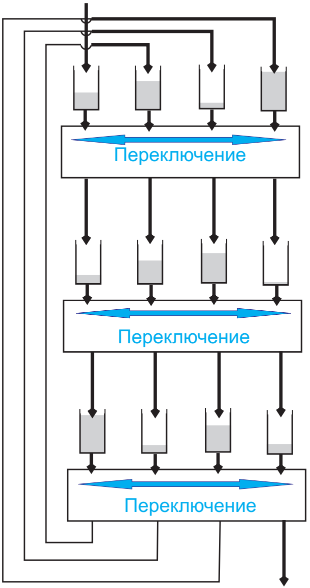
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)

Функционирнование ДППС (пример)



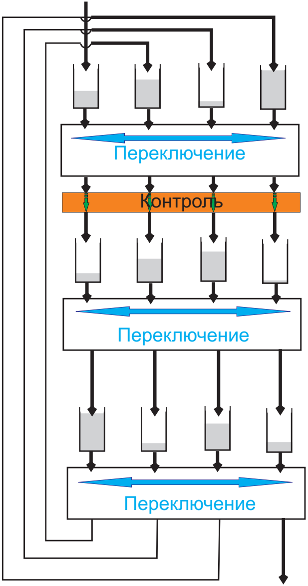
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)

Функционирнование ДППС (пример)



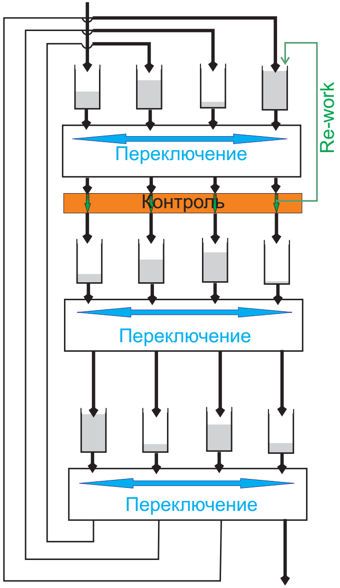
- **Setup time** — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- **Breakdown time** — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- **Switching time** — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции

Функционирнование ДППС (пример)



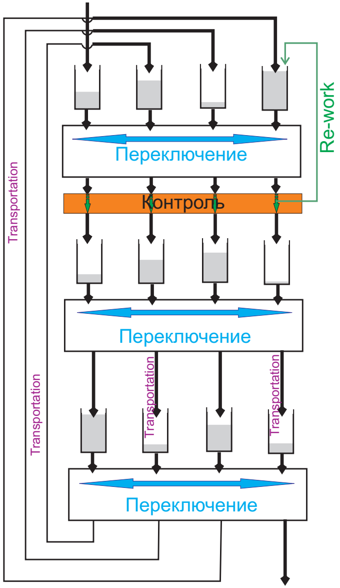
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции

Функционирнование ДППС (пример)



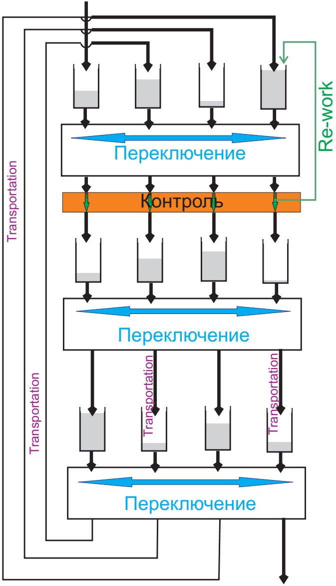
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов

Функционирнование ДППС (пример)



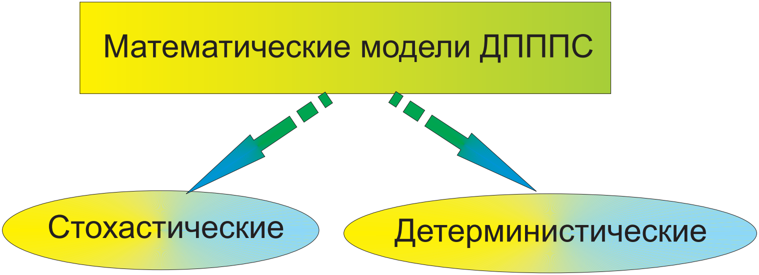
- Setup time — время установки:
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов
- Transportation time (delay) — время транпортировки: время, в течение которого продукт перемещается с одного процессора или пункта хранения (буфера) на другой процессор или пункт хранения

Функционирнование ДППС (пример)



- Setup time — время установки:
- Breakdown time — время отключения:
- Switching time — время переключения
- Raw processing time
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов
- Transportation time (delay) — время транпортировки: время, в течение которого продукт перемещается с одного процессора или пункта хранения (буфера) на другой процессор или пункт хранения
- Flow time — потоковое время: общее время, в течение которого продукт находился в сети или в пределах отдельной части сети, например, обрабатывался на данном процессоре (время ожидания во входном буфере включается)

Математическое моделирование ДПППС

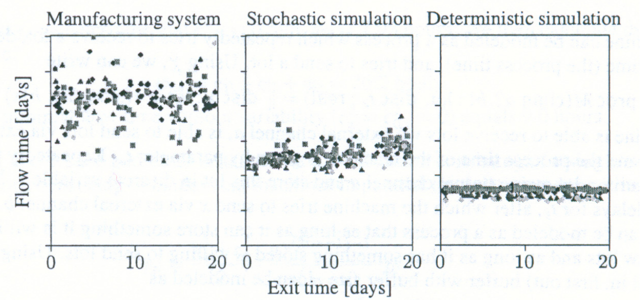


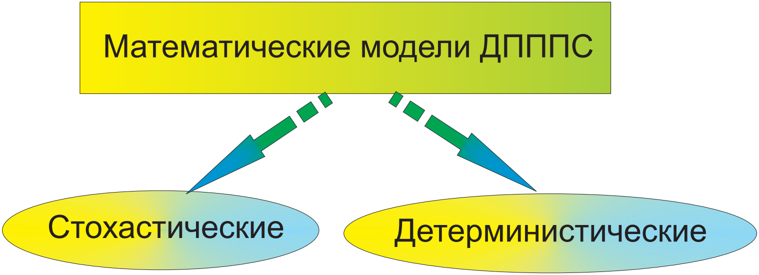
Математическое моделирование ДПППС

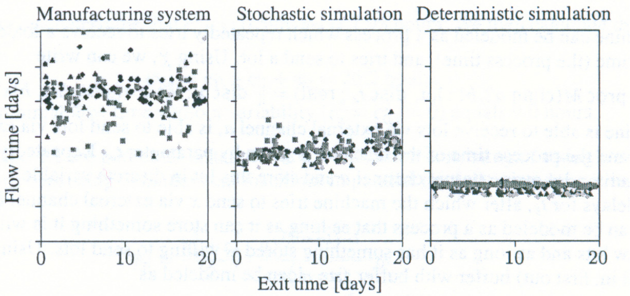
Математические модели ДПППС

Стохастические

Детерминистические

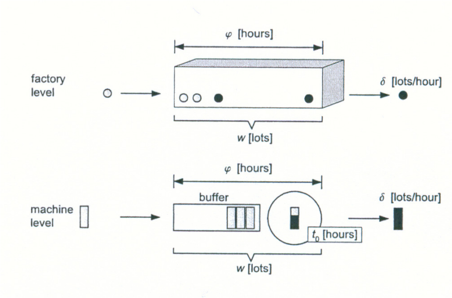



Математические модели ДППС
Стохастические
Детерминистические

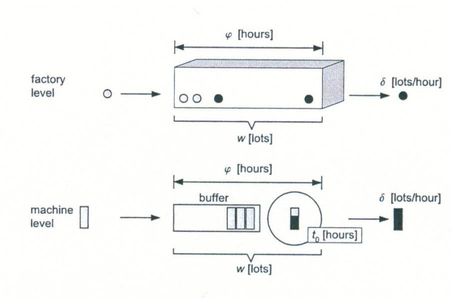

Manufacturing system
Stochastic simulation
Deterministic simulation
Flow time [days]
Exit time [days]
0
10
20

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

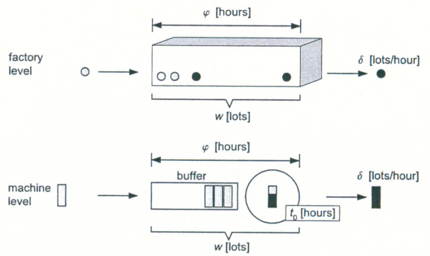


Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

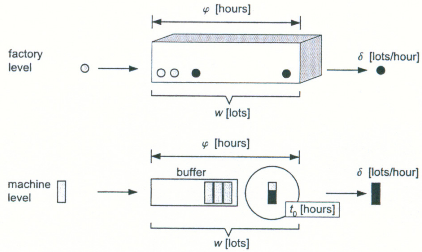
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени

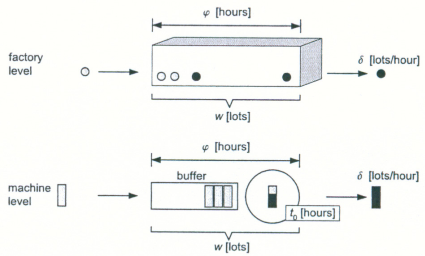
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети

- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

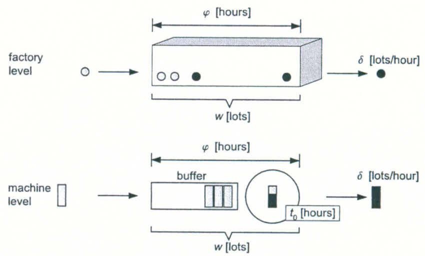
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов

- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

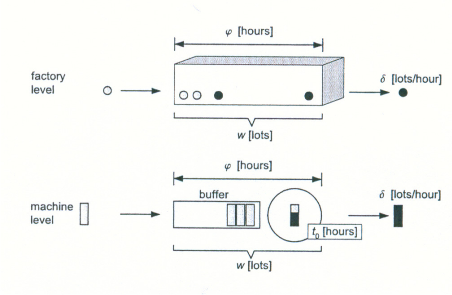
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

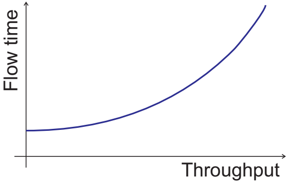


- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

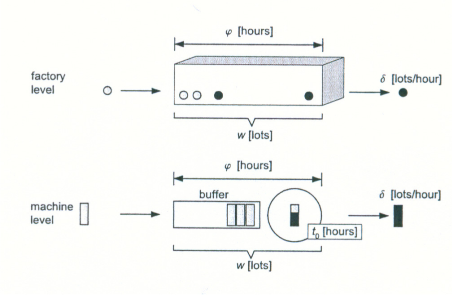
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

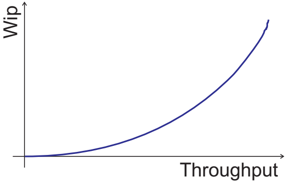




- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

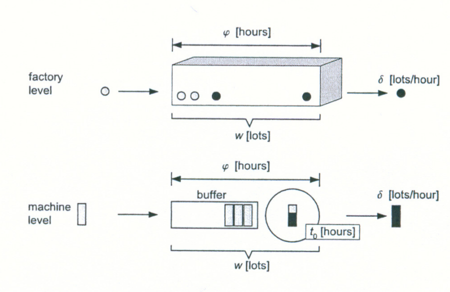
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

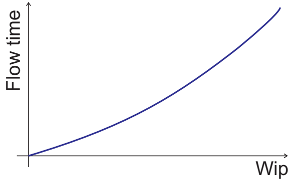




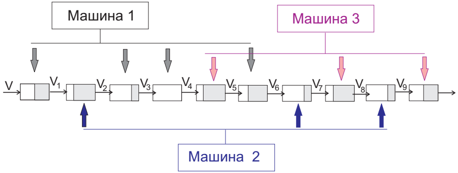
- Throughput δ — проводимость: Количество лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

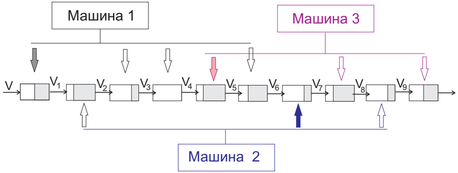




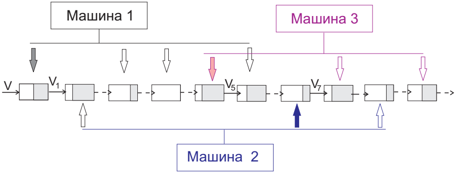
- Throughput δ — проводимость: Количество лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.


Машина 1
Машина 3
V
V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9
Машина 2

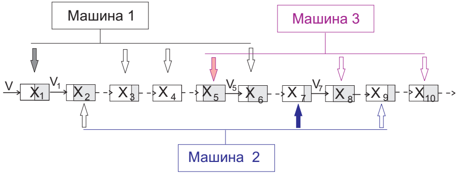
Управление ДППС



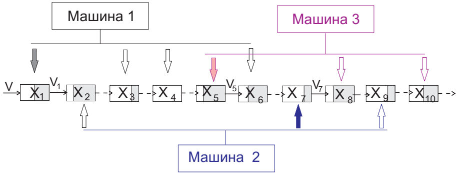
Управление ДПППС



Управление ДППС

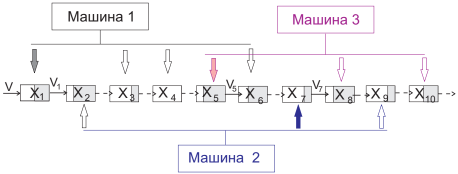


Управление ДППС



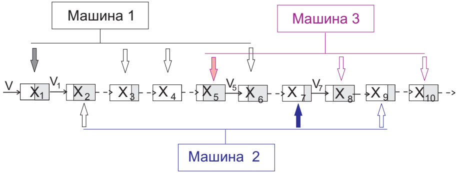
$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Управление ДППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

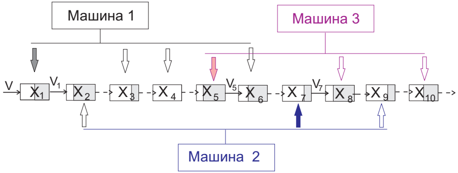
- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?

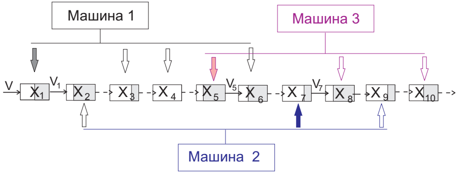
Управление ДППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

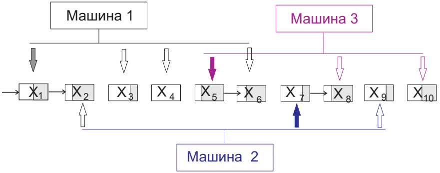
Управление ДППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

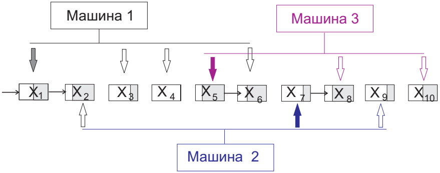


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДПППС

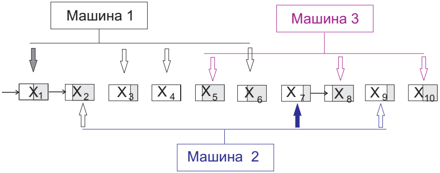


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \qquad \dot{x}_2 = v_1 \qquad \dot{x}_3 = 0 \qquad \dot{x}_4 = 0 \qquad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \qquad \dot{x}_7 = -v_7 \qquad \dot{x}_8 = v_7 \qquad \dot{x}_9 = 0 \qquad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС

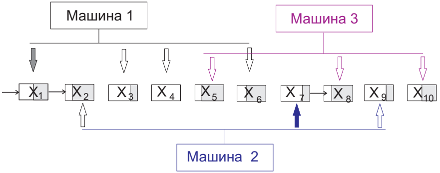


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС

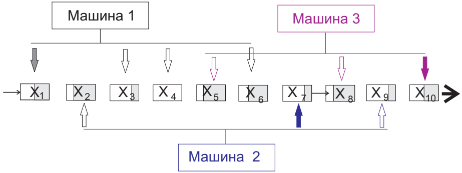


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = 0$$
$$\dot{x}_6 = 0 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС

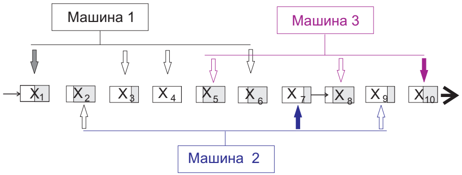


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = 0$$
$$\dot{x}_6 = 0 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = -v_{10}$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС



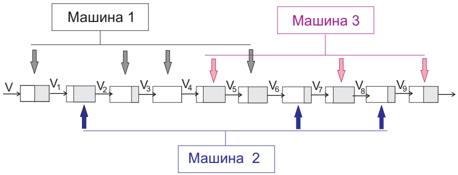
$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС



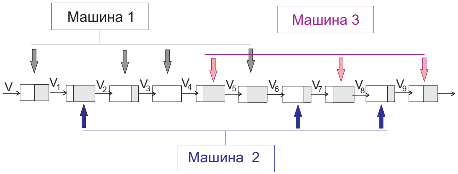
$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС



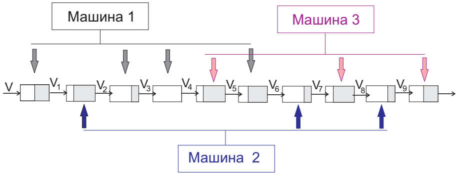
$\delta_{i \mapsto j}$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Протокол называется устойчивым, если $\overline{\lim}_{t \to \infty} w(t) < \infty$.

Управление ДППС



$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

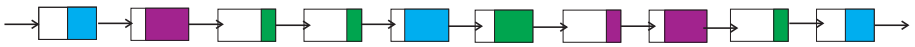
Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Протокол называется устойчивым, если $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$.
- Когда существует устойчивый протокол и в чем он состоит?

Типы ДПППС

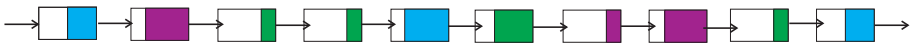
Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

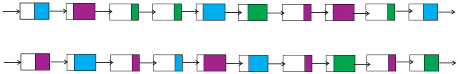


Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

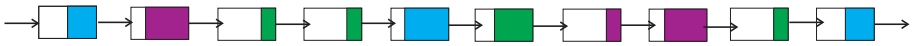


- Сеть с параллельными потоками

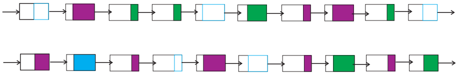


Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

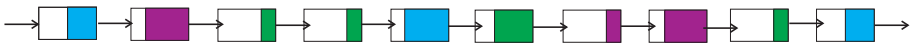


- Сеть с параллельными потоками

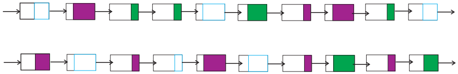


Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

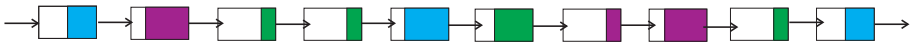


- Сеть с параллельными потоками

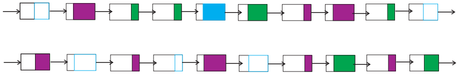


Типы ДППС

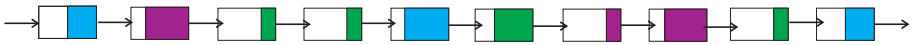
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



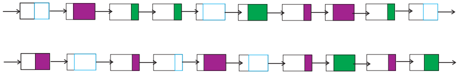
- Сеть с параллельными потоками



- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

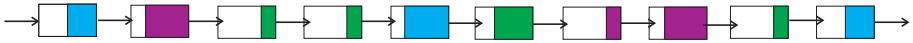


- Сеть с параллельными потоками

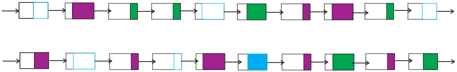


Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

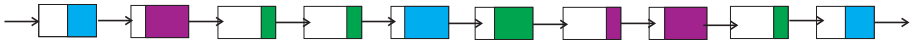


- Сеть с параллельными потоками

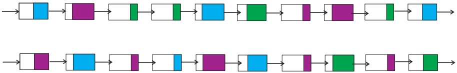


Типы ДППС

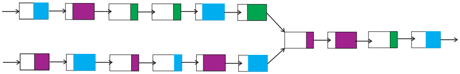
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



- Сеть с параллельными потоками

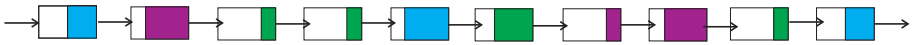


- Сеть со сливающимися потоками

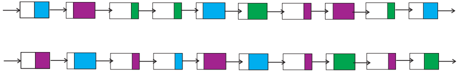


Типы ДППС

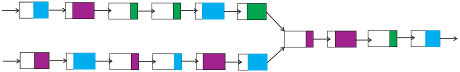
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



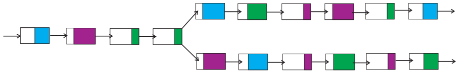
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками



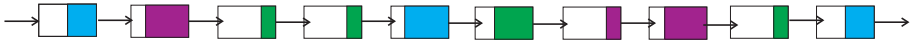
- Ветвящаяся сеть



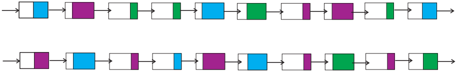
Типы ДППС

Циклические сети

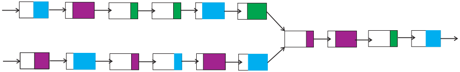
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



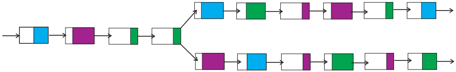
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками



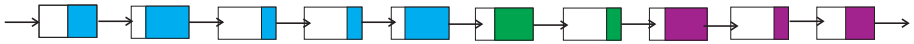
- Ветвящаяся сеть



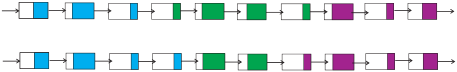
Типы ДППС

Ациклические сети

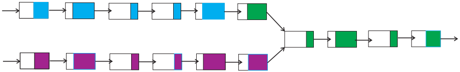
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



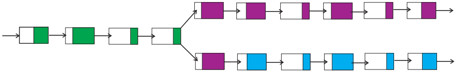
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками

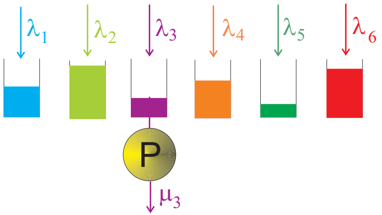


- Ветвящаяся сеть

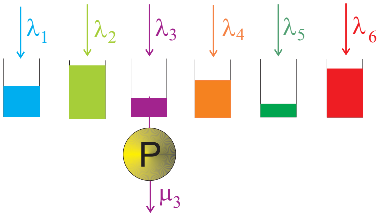


Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)

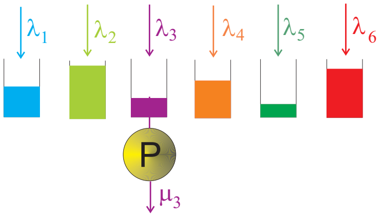


Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



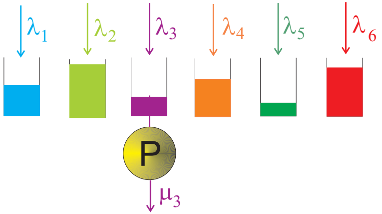
- Система состоит из n буферов и одного процессора.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



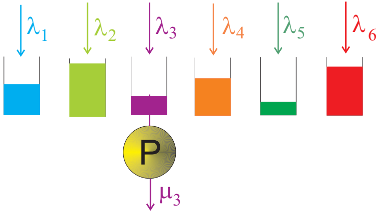
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



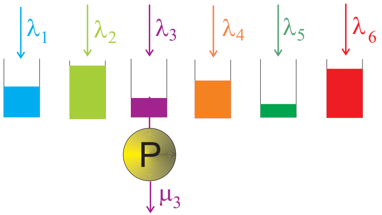
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



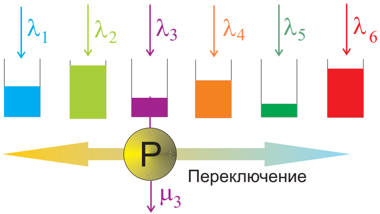
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



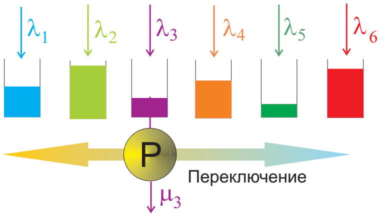
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.

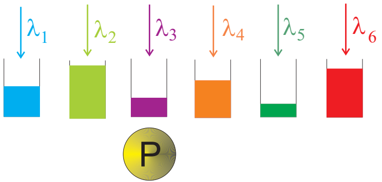
Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.

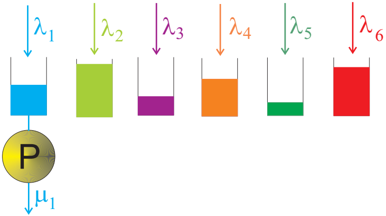
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



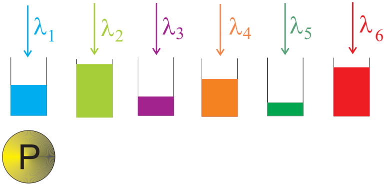
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



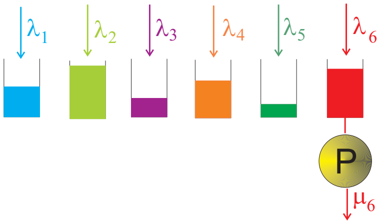
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



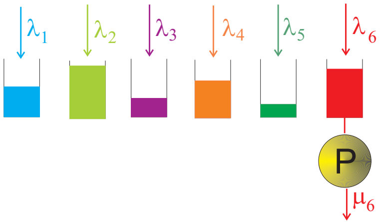
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



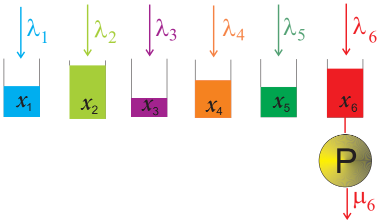
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



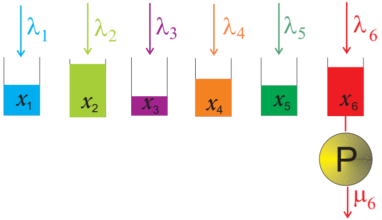
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



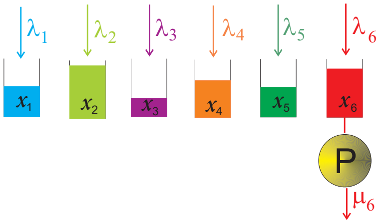
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



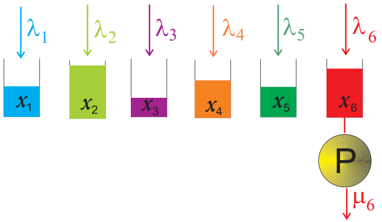
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \ldots, n, \ominus$:

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



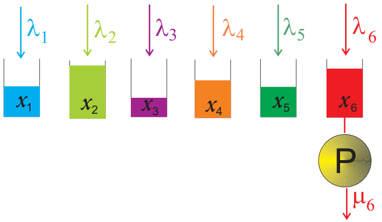
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \ldots, n, \ominus$: $q = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер;

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



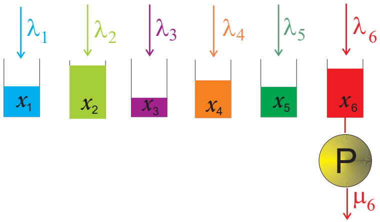
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \ldots, n, \ominus$: $q = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \dots, n, \ominus$: $q = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.
- Полное состояние (x, q).

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \dots, n, \ominus$: $q = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.
- Полное состояние (x, q).
- Процесс — пара функций времени $[x(\cdot), q(\cdot)]$.

Строгое определение процесса

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i\geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i\geq 0}$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i \geq 0}$. Значение $q(t) = q_i$ поддерживается на интервале с концами $t_i \leq t_{i+1}$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i\geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i\geq 0}$. Значение $q(t) = q_i$ поддерживается на интервале с концами $t_i \leq t_{i+1}$.

Пояснение

Если значение q_i пробегается мгновенно, то $t_i = t_{i+1}$.

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна,

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \ldots, n$ верны следующие соотношениям:

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \ldots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \dots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma - u_\sigma(t), \quad \text{где} \quad 0 \leq u_\sigma(t) \leq \mu_\sigma, \quad \text{если} \quad q(t) = \sigma,$$

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

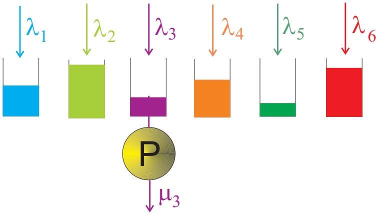
- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \dots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma - u_\sigma(t), \quad \text{где} \quad 0 \leq u_\sigma(t) \leq \mu_\sigma, \quad \text{если} \quad q(t) = \sigma,$$

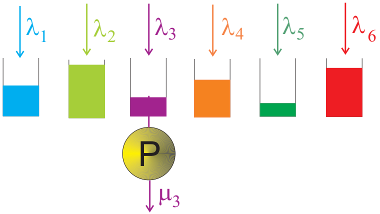
$$x_\sigma(t) \geq 0 \qquad \forall t.$$

Комментарий к определению процесса



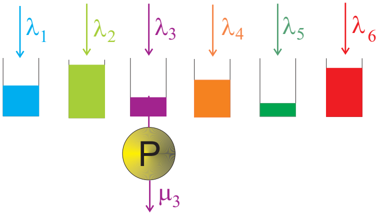
На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Комментарий к определению процесса



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

Комментарий к определению процесса

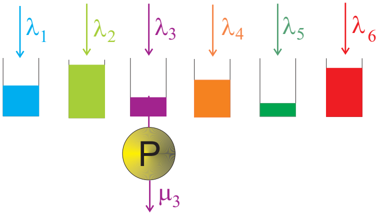


На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;

Комментарий к определению процесса

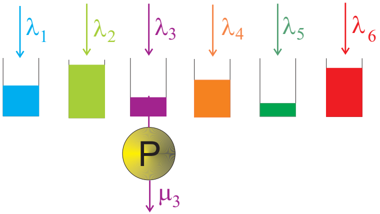


На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;

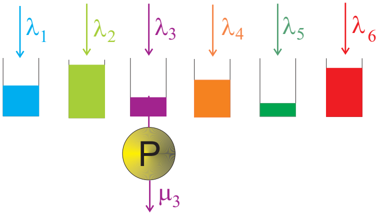
Комментарий к определению процесса



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Комментарий к определению процесса

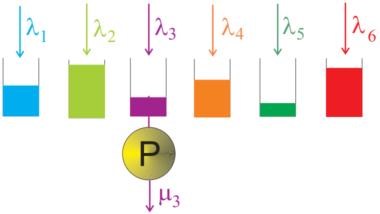


На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Далее будет введен и исследован некоторый класс подобных правил.



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Далее будет введен и исследован некоторый класс подобных правил. Вместе с тем нам не потребуется общее определение политики переключения.

Необходимое условие устойчивости

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

- неустойчивым в противном случае

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

- неустойчивым в противном случае

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

- сильно неустойчивым, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

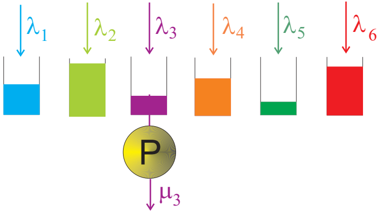
- неустойчивым в противном случае

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

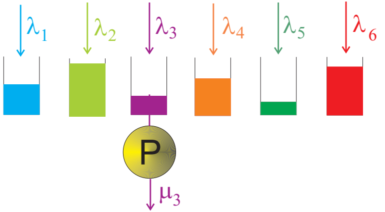
- сильно неустойчивым, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

Необходимое условие устойчивости



Необходимое условие устойчивости

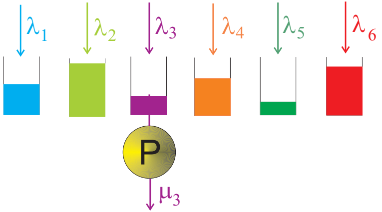


Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

Необходимое условие устойчивости



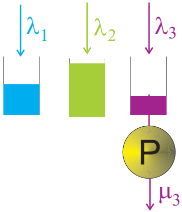
Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Необходимое условие устойчивости



Теорема

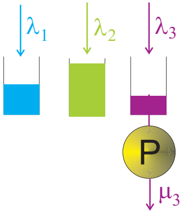
Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.
Соответственно для существования хотя бы одного устойчивого процесса необходимо выполнение противоположного неравенства

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1. \tag{1}$$

Необходимое условие устойчивости



При выполнении неравенства (1) существует политика переключения, порождающая только устойчивые процессы

Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.
Соответственно для существования хотя бы одного устойчивого процесса необходимо выполнение противоположного неравенства

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1. \tag{1}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \leq W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \leq \alpha_2 V(t)$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \le W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \le \alpha_2 V(t)$$

Достаточно взять

$$\alpha_1 := \min_{\sigma=1,\dots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}, \qquad \alpha_2 := \max_{\sigma=1,\dots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ – константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \leq W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \leq \alpha_2 V(t)$$

Достаточно взять

$$\alpha_1 := \min_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}, \qquad \alpha_2 := \max_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}$$

Следствие

$\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} W(t) = \infty$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \qquad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \qquad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot{x}_s(t)}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \qquad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot V(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot x_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot x_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - u_s(t)}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot{x}_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \overbrace{u_s(t)}^{\leq \mu_s}}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot{x}_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \overbrace{u_s(t)}^{\leq \mu_s}}{\mu_s} \geq \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \mu_s}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

$$\dot V(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\dot x_\sigma(t)}{\mu_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \circleddash \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \circleddash \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$.

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t \Rightarrow V(t) \geq V(0) + (\gamma - 1)(t - t_0)$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t \Rightarrow V(t) \geq V(0) + (\gamma - 1)(t - t_0) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}$$

,

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t \to \infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \operatorname{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq \gamma-1 & \text{если } q(t)\neq \circleddash\\ =\gamma & \text{если } q(t)=\circleddash\end{cases},\quad \text{где}\quad \gamma=\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t)\neq \circleddash\\ =\gamma>0 & \text{если } q(t)=\circleddash\end{cases}\Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t)\geq V(t_0)+\gamma\,\mathrm{mes}\{t: q(t)=\circleddash\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t)<\infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t: q(t)=\circleddash\}<\infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq \gamma - 1 & \text{если } q(t)\neq \circleddash \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \circleddash\end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t)\neq \circleddash \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \circleddash\end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \circleddash\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \circleddash\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\varliminf_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \circleddash \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \circleddash \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \circleddash \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \circleddash \end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \operatorname{mes}\{t : q(t) = \circleddash\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\operatorname{mes}\{t : q(t) = \circleddash\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\varliminf_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq \gamma - 1 & \text{если } q(t)\neq \ominus\\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases},\quad \text{где}\quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

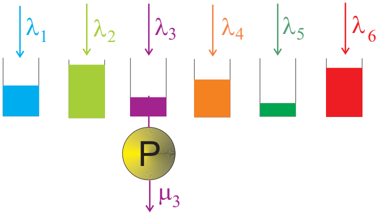
Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

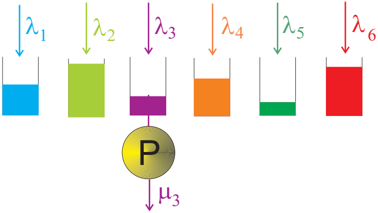
$$\dot V(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t)\neq \ominus\\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \operatorname{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\operatorname{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\varliminf_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Достаточное условие устойчивости

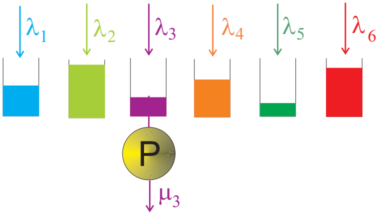


Достаточное условие устойчивости



$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

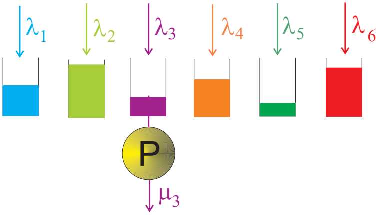
Достаточное условие устойчивости



$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует такая политика, что

Достаточное условие устойчивости

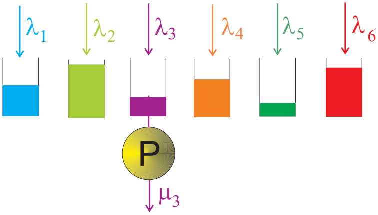


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия существует такая политика, что

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;

Достаточное условие устойчивости

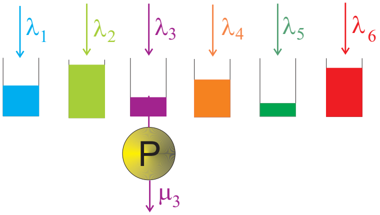


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует такая политика, что

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);

Достаточное условие устойчивости

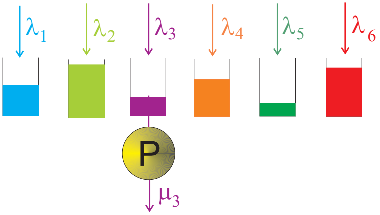


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует такая политика, что

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);
- Все процессы сходятся к периодическому с течением времени.

Достаточное условие устойчивости



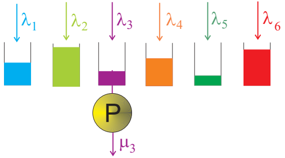
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует такая политика, что

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);
- Все процессы сходятся к периодическому с течением времени.

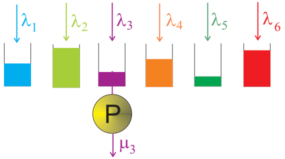
Будет описан целый класс политик с такими свойствами.

Достаточное условие устойчивости



Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Достаточное условие устойчивости

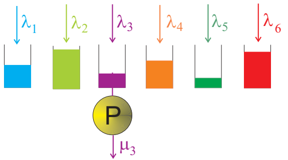


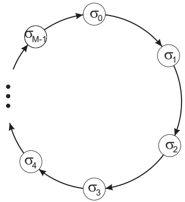
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Достаточное условие устойчивости



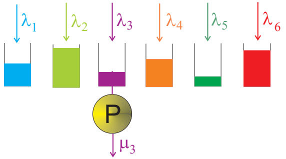


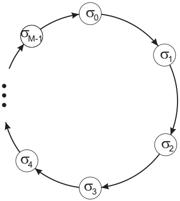
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

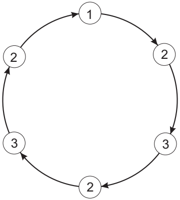
Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Достаточное условие устойчивости





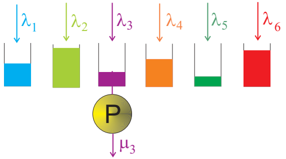


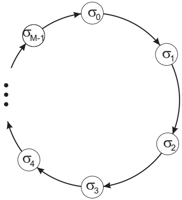
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

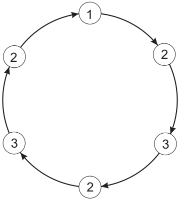
Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Достаточное условие устойчивости







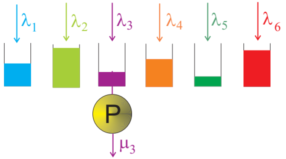
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

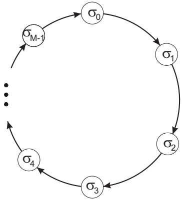
Определение

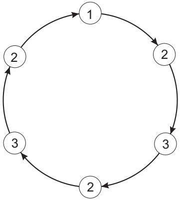
Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Один и тот же буфер может встречаться несколько раз.

Достаточное условие устойчивости







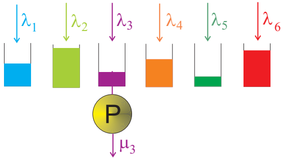
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

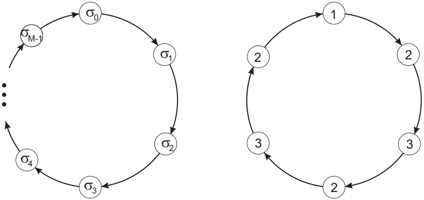
Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Один и тот же буфер может встречаться несколько раз.
Индекс i в выражении σ_i интерпретируем как элемент кольца вычетов $\mathrm{mod}\ M$.

Достаточное условие устойчивости

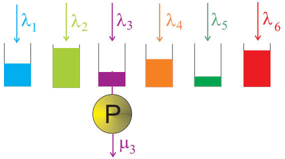


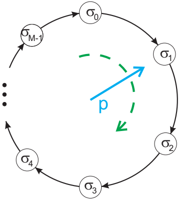


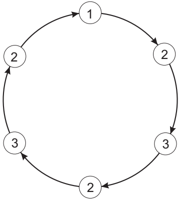
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Использует внутреннюю целую (mod M) переменную p — текущую фазу цикла.

Достаточное условие устойчивости

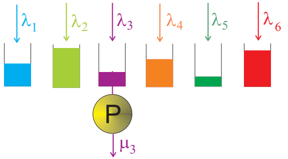


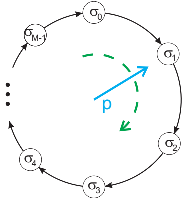


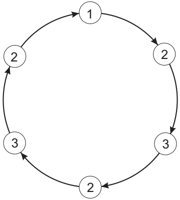


Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла.



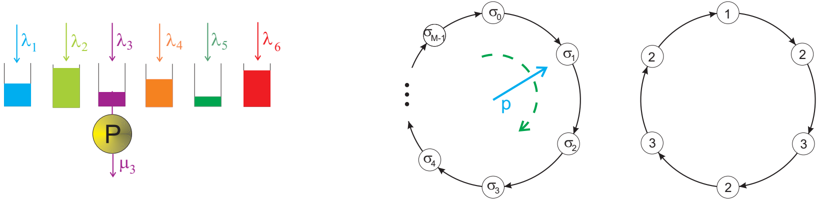




Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

Достаточное условие устойчивости

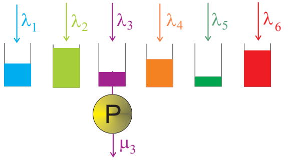


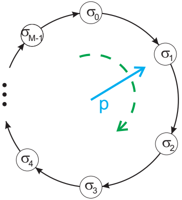
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

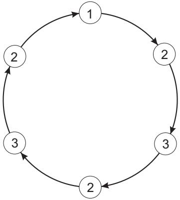
Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;

Достаточное условие устойчивости





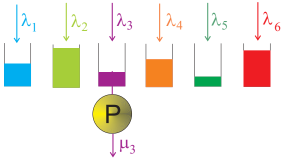


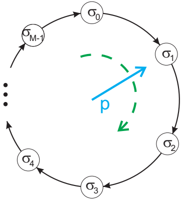
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

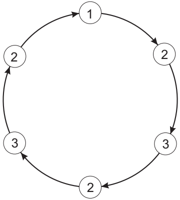
Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$ пока его уровень не снижается до $\theta_p x_{\sigma_p}(\tau)$ (τ — момент начала фазы)

Достаточное условие устойчивости





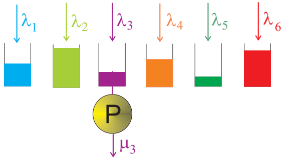


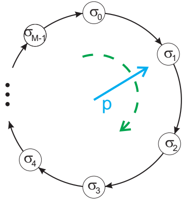
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

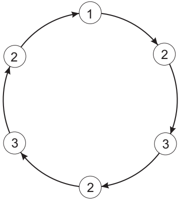
Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$ пока его уровень не снижается до $\theta_p x_{\sigma_p}(\tau)$ (τ — момент начала фазы)
- После этого он обслуживается еще c_p единиц времени на скорости входящего потока λ_σ;

Достаточное условие устойчивости





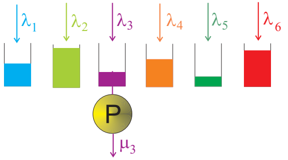


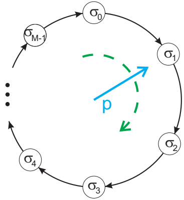
Циклическая политика с относительными порогами и круизами

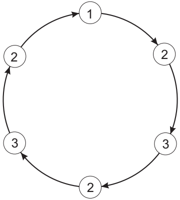
Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$ пока его уровень не снижается до $\theta_p x_{\sigma_p}(\tau)$ (τ — момент начала фазы)
- После этого он обслуживается еще c_p единиц времени на скорости входящего потока λ_σ;
- После этого $p := p + 1(\mod M)$ и процессор переключается в буфер σ_p.

Достаточное условие устойчивости







Циклическая политика с относительными порогами и круизами

Использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p — текущую фазу цикла. Для каждого p задан относительный порог $\theta_p \in [0, 1)$ — требуемый процент снижения содержимого буфера — и длительность круиза $c_p \geq 0$ ($\theta_p > 0 \Rightarrow c_p = 0$). Круизом называется обслуживание пустого буфера на скорости входящего потока. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$ пока его уровень не снижается до $\theta_p x_{\sigma_p}(\tau)$ (τ — момент начала фазы)
- После этого он обслуживается еще c_p единиц времени на скорости входящего потока λ_σ;
- После этого $p := p + 1(\mod M)$ и процессор переключается в буфер σ_p.

Политика однозначно определяет процесс $[x(\cdot), u(\cdot)]$ по начальным данным $x(0) = x_0, p(0) = p_0$.

Универсальность циклической политики

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)\ \forall t$.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)\ \forall t$. Краткая запись: $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2$

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)\ \forall t$. Краткая запись: $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2$

Определение

Процесс называется интенсивным, если для него обслуживание любого буфера всегда производится на максимально возможной скорости: $q(t) = i \neq \ominus \Rightarrow u_i(t) = \mu_i$.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)\ \forall t$. Краткая запись: $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2$

Определение

Процесс называется интенсивным, если для него обслуживание любого буфера всегда производится на максимально возможной скорости: $q(t) = i \neq \ominus \Rightarrow u_i(t) = \mu_i$.

Это подразумевает, что из опустошенного буфера надо немедленно уходить.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)\ \forall t$. Краткая запись: $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2$

Определение

Процесс называется интенсивным, если для него обслуживание любого буфера всегда производится на максимально возможной скорости: $q(t) = i \neq \ominus \Rightarrow u_i(t) = \mu_i$.

Это подразумевает, что из опустошенного буфера надо немедленно уходить.

Наблюдение

Циклические политики с относительными порогами порождают только интенсивные процессы.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные"процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами

Определение

Процесс π_1 равномерно лучше процесса π_2, если в любой момент времени t wip для первого из них $w_1(t)$ не превосходит wip $w_2(t)$ для второго: $w_1(t) \leq w_2(t)$ $\forall t$. Краткая запись: $\pi_1 \trianglelefteq \pi_2$

Определение

Процесс называется интенсивным, если для него обслуживание любого буфера всегда производится на максимально возможной скорости: $q(t) = i \neq \circleddash \Rightarrow u_i(t) = \mu_i$.

Это подразумевает, что из опустошенного буфера надо немедленно уходить.

Наблюдение

Циклические политики с относительными порогами порождают только интенсивные процессы. Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Универсальность циклической политики

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Определение

На интервале T процесс π' лучше π'', если в любой момент $t \in T$ уровень любого буфера у для первого процесса ниже, чем у второго: $x_i'(t) \leq x_i''(t)\ \forall i$.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Определение

На интервале T процесс π' лучше π'', если в любой момент $t \in T$ уровень любого буфера у для первого процесса ниже, чем у второго: $x_i'(t) \leq x_i''(t)\ \forall i$. Если T — весь интервал эсперимента, указание на интервал опускаем.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Определение

На интервале T процесс π' лучше π'', если в любой момент $t \in T$ уровень любого буфера у для первого процесса ниже, чем у второго: $x_i'(t) \leq x_i''(t)\ \forall i$. Если T — весь интервал эсперимента, указание на интервал опускаем.

Интенсивная скорость обслуживания буфера σ в состоянии $[x, q]$

$$U_\sigma[x,q] := \begin{cases} 0 & \text{если } \sigma \neq q \\ \left.\begin{array}{lll} \mu_\sigma & \text{при} & x_\sigma > 0 \\ \lambda_\sigma & \text{при} & x_\sigma = 0 \end{array}\right\} & \text{если } \sigma = q \end{cases}$$

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Определение

На интервале T процесс π' лучше π'', если в любой момент $t \in T$ уровень любого буфера у для первого процесса ниже, чем у второго: $x_i'(t) \leq x_i''(t)\ \forall i$. Если T — весь интервал эсперимента, указание на интервал опускаем.

Интенсивная скорость обслуживания буфера σ в состоянии $[x, q]$

$$U_\sigma[x,q] := \begin{cases} 0 & \text{если } \sigma \neq q \\ \left.\begin{array}{lll} \mu_\sigma & \text{при} & x_\sigma > 0 \\ \lambda_\sigma & \text{при} & x_\sigma = 0 \end{array}\right\} & \text{если } \sigma = q \end{cases}$$

Определение

Процесс называется интенсивным, если для него скорость обслуживания любого буфера всегда интенсивна: $u_\sigma(t) = U_\sigma[x,q]\ \forall \sigma, t$.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Теорема

Для любого процесса π существует интенсивный процесс π_{int} с теми же начальными данными, который лучше исходного

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Теорема

Для любого процесса π существует интенсивный процесс π_{int} с теми же начальными данными, который лучше исходного

Lemma

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Теорема

Для любого процесса π существует интенсивный процесс π_{int} с теми же начальными данными, который лучше исходного

Lemma

- Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Универсальность циклической политики

Если исключить заведомо "неэффективные" процессы, то любой периодический процесс порождается некоторой циклической политикой с относительными порогами и круизами

Теорема

Для любого процесса π существует интенсивный процесс π_{int} с теми же начальными данными, который лучше исходного

Lemma

- Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.
- Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Доказательство теоремы

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно.

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$.

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

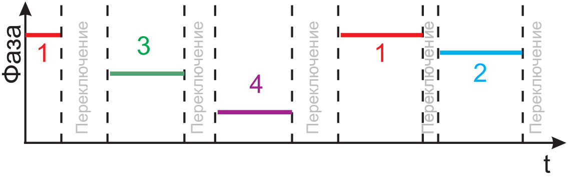
Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

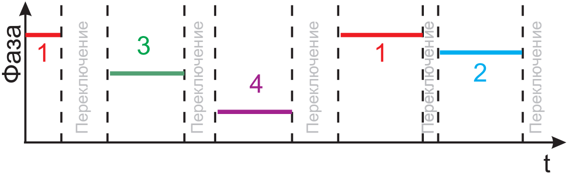
Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



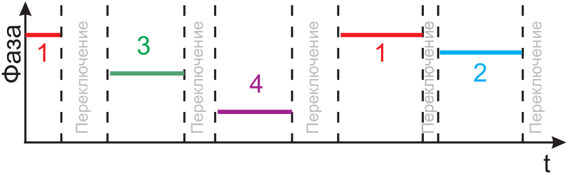
Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны.

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



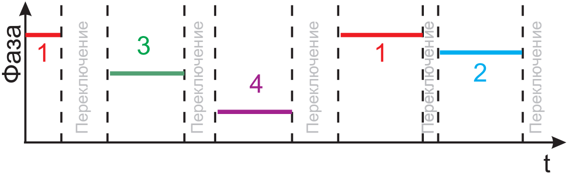
Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны. При этом $\tau\left(\mathfrak{P}_{2k+1}\right) = \tau_{b_k \to b_{k+1}}$, где $i_k := Q\left(\mathfrak{P}_{2k}\right)$ буфер, обслуживаемый в k-ую очередь

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны. При этом $\tau\left(\mathfrak{P}_{2k+1}\right) = \tau_{b_k \to b_{k+1}}$, где $i_k := Q\left(\mathfrak{P}_{2k}\right)$ буфер, обслуживаемый в k-ую очередь

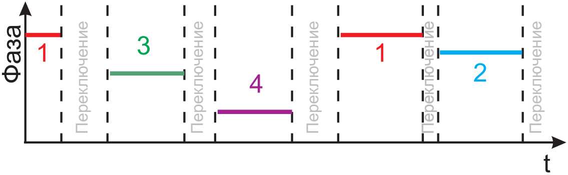
Процесс однозначно определен тремя последовательностями:

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны. При этом $\tau\left(\mathfrak{P}_{2k+1}\right) = \tau_{b_k \to b_{k+1}}$, где $i_k := Q\left(\mathfrak{P}_{2k}\right)$ буфер, обслуживаемый в k-ую очередь

Процесс однозначно определен тремя последовательностями:

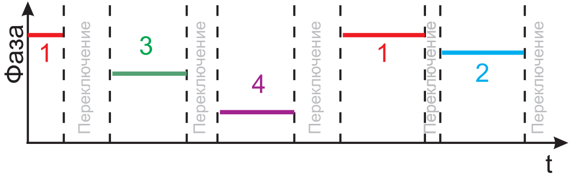
- Последовательностью посещения буферов $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны. При этом $\tau\left(\mathfrak{P}_{2k+1}\right) = \tau_{b_k \to b_{k+1}}$, где $i_k := Q\left(\mathfrak{P}_{2k}\right)$ буфер, обслуживаемый в k-ую очередь

Процесс однозначно определен тремя последовательностями:

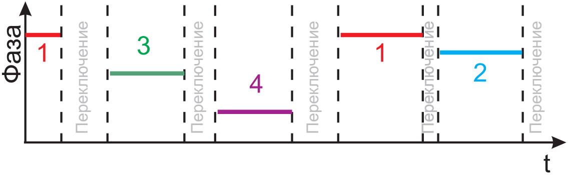
- Последовательностью посещения буферов $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Последовательностью длительностей обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$, где $\tau_i^* := \tau\left(\mathfrak{P}_{2i}\right)$

Доказательство теоремы

Определение

Фаза процесса $\mathfrak{P}$ — период, в течение которого дискретное состояние $q(t) \equiv Q(\mathfrak{P})$ неизменно. Длительность фазы обозначим $\tau(\mathfrak{P})$

Активная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$; пассивная фаза $Q(\mathfrak{P}) \neq \ominus$. Они чередуются.



Процесс связан с последовательностью фаз $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, где четные фазы активны, а нечетные пассивны. При этом $\tau\left(\mathfrak{P}_{2k+1}\right) = \tau_{b_k \to b_{k+1}}$, где $i_k := Q\left(\mathfrak{P}_{2k}\right)$ буфер, обслуживаемый в k-ую очередь

Процесс однозначно определен тремя последовательностями:

- Последовательностью посещения буферов $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Последовательностью длительностей обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$, где $\tau_i^* := \tau\left(\mathfrak{P}_{2i}\right)$
- Последовательностью $u_{b_0}(\cdot), u_{b_1}(\cdot), u_{b_2}(\cdot), \ldots$ скоростей обслуживания: $0 \leq u_{b_i}(t) \leq \mu_{b_i}\ \forall t \in [0, \tau_i]$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

Процесс π_{int}

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$

Процесс π_{int}

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \leq u_{b_i}(t) \leq \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \leq u_{b_i}(t) \leq \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \leq u_{b_i}(t) \leq \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \geq x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Пассивная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ Рассмотрим обслуживаемый буфер b

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ Рассмотрим обслуживаемый буфер b
Пусть η — момент, до которого этот буфер обслуживается на скорости μ_b для процесса π_{int}

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ Рассмотрим обслуживаемый буфер b
Пусть η — момент, до которого этот буфер обслуживается на скорости μ_b для процесса π_{int} Тогда $x_\sigma^{\text{int}}(t) = 0 \le x_\sigma(t)$ при $\eta < t \le \tau$.

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \dots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \dots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\text{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\text{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\text{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ Рассмотрим обслуживаемый буфер b
Пусть η — момент, до которого этот буфер обслуживается на скорости μ_b для процесса π_{int} Тогда $x_\sigma^{\text{int}}(t) = 0 \le x_\sigma(t)$ при $\eta < t \le \tau$. При $0 \le t \le \eta$

Доказательство теоремы

Процесс однозначно определен тремя последовательностями

Процесс π

- Очередность буферов $b_0, b_1, b_2, \ldots$
- Времена обслуживания $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$
- Буфер b_i обслуживается по программе $0 \le u_{b_i}(t) \le \mu_{b_i}$

Процесс π_{int}

- Та же очередь $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$
- Та же последовательность $\tau_0^*, \tau_1^*, \ldots$
- Буфер b_i обслуживается в течение времени τ_i^* на интенсивной скорости $u_{b_i} = U_{b_i}[x, b_i]$

Lemma

Если в начале фазы процесс π_{int} лучше π, то он лучше и в течение всей фазы

$t = 0 \sim$ начало фазы, τ — ее длительность, $x_\sigma(0) \ge x_\sigma^{\mathrm{int}}(0)\ \forall \sigma$
Активная фаза $x_\sigma(t) = x_\sigma(0) + \lambda_\sigma t \ge x_\sigma^{\mathrm{int}}(0) + \lambda_\sigma t = x_\sigma^{\mathrm{int}}(t)$
для необслуживаемых буферов σ Рассмотрим обслуживаемый буфер b
Пусть η — момент, до которого этот буфер обслуживается на скорости μ_b для процесса π_{int} Тогда $x_\sigma^{\mathrm{int}}(t) = 0 \le x_\sigma(t)$ при $\eta < t \le \tau$. При $0 \le t \le \eta$

$$x_b(t) = x_b(0) + \int_0^t \left[\lambda_b - \underbrace{u_b(t)}_{\le \mu_b}\right] dt \ge x_b^{\mathrm{int}}(0) + \int_0^t \left[\lambda_b - \mu_b\right] dt = x_b^{\mathrm{int}}(t)$$

Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.
Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)

Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)

Периодический процесс

Политика

Доказательство леммы

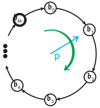
Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)

Периодический процесс

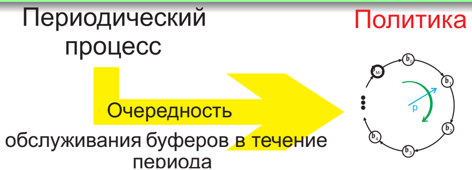
Политика



Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)



Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

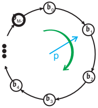
Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)

Периодический процесс

Очередность обслуживания буферов в течение периода

Политика



Фаза b_p

Процент снижения

θ_p

Длительность круиза

C_p

Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

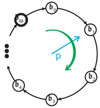
Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)

Периодический процесс

Политика

Очередность обслуживания буферов в течение периода



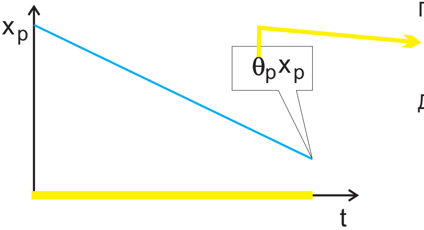
Фаза b_p

Процент снижения

θ_p

Длительность круиза

$C_p = 0$

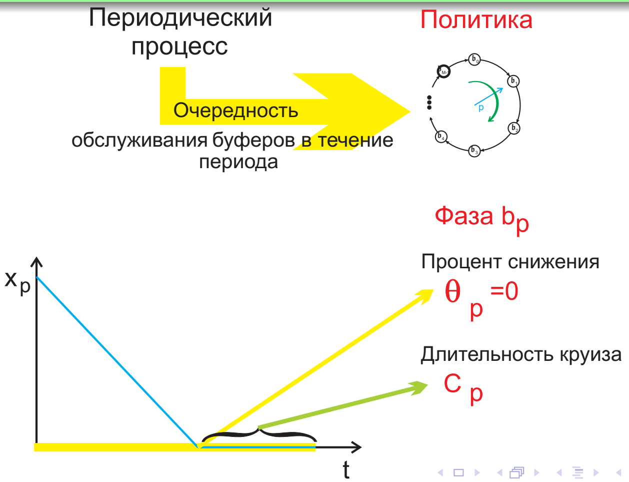


Доказательство леммы

Циклические политики с относительными порогами и круизами порождают интенсивные процессы.

Любой интенсивный периодический процесс порождается такой политикой.

Имитационная политика (the copycat policy)



Устойчивость: Технические определения

Устойчивость: Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t.$

Устойчивость: Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Устойчивость: Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \geq 1$.

Устойчивость: Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \le t_{s+1}$ целое $s \ge 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \ge 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо.

Устойчивость: Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ \ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

Устойчивость: Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$

Устойчивость: Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$
- $\lim_{r \to +\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s.$

Устойчивость: Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \le t_{s+1}$ целое $s \ge 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-циклической: $t_{i+s} = t_i + T, i \ge 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \dots;$
- $\lim_{r \to +\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s.$

Наблюдение

Для процессов, порожденных общей циклической политикой, первое свойство заведомо верно.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t), \; q(t+T) = q(t) \; \forall t$.

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ \ q(t+T) = q(t)\ \forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t), \;\; q(t+T) = q(t) \;\forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ \ q(t+T) = q(t)\ \forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t), \;\; q(t+T) = q(t) \;\forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Технические определения (продолжение)

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Определение

- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.

Технические определения (продолжение)

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Определение

- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.
- Общий минимальный период и порядок этих сдвигов называются минимальным периодом и порядком предельного цикла.

Технические определения (продолжение)

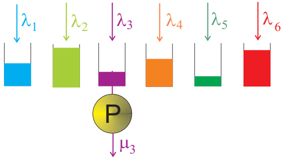
Наблюдение

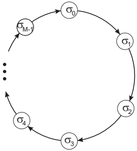
Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

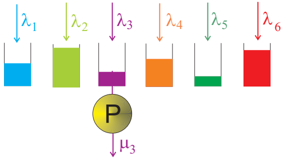
Определение

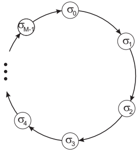
- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.
- Общий минимальный период и порядок этих сдвигов называются минимальным периодом и порядком предельного цикла.
- Процесс сходится к предельному циклу, если он сходится к любому из составляющих цикл периодических процессов.

Устойчивость циклической политики





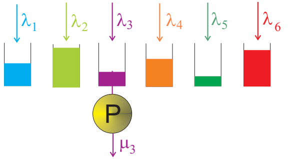


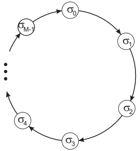


Теорема

Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами.

Устойчивость циклической политики





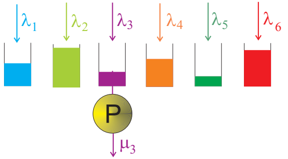
Теорема

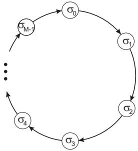
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами. Если выполнено условие устойчивости

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

Устойчивость циклической политики





Теорема

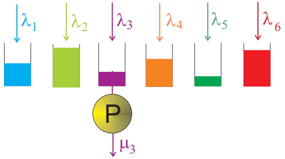
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами. Если выполнено условие устойчивости

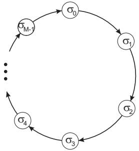
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;

Устойчивость циклической политики





Теорема

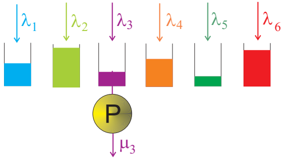
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами. Если выполнено условие устойчивости

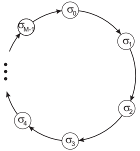
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;

Устойчивость циклической политики





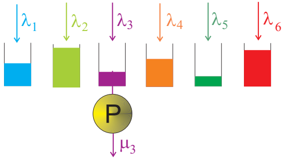
Теорема

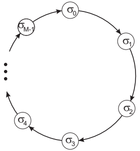
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами. Если выполнено условие устойчивости

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;
- Все процессы сходятся к этому циклу.





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

Теорема

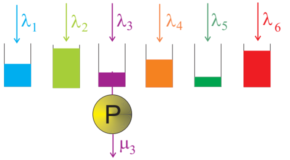
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с относительными порогами и круизами. Если выполнено условие устойчивости

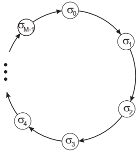
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Обоснование Следствия





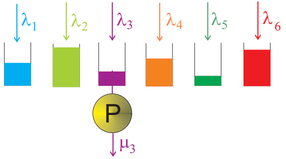
Следствие

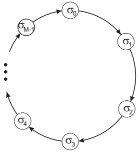
Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Обоснование Следствия





Следствие

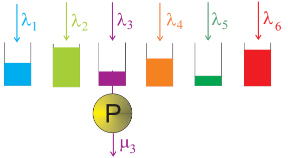
Все процессы устойчивы

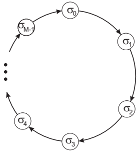
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

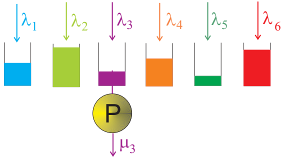
Все процессы устойчивы

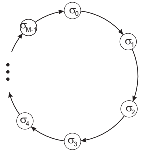
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

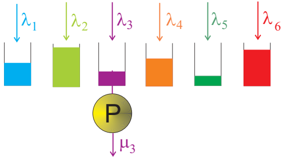
Все процессы устойчивы

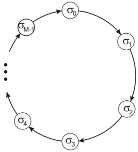
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

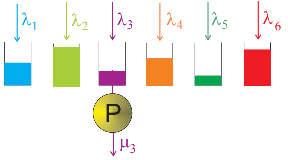
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

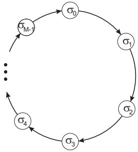
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

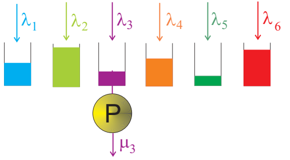
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

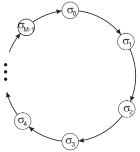
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

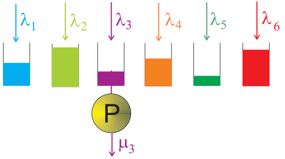
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

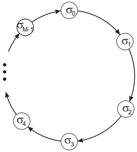
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

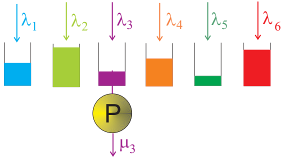
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

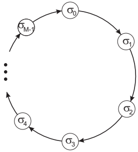
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\dots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

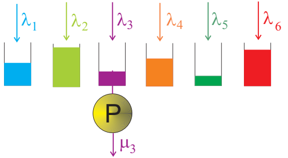
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

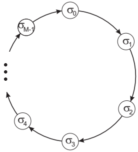
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \leq \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\}$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

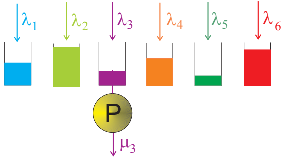
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

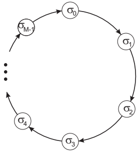
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

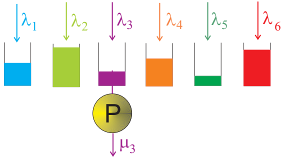
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

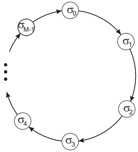
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

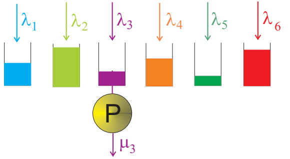
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

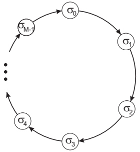
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \leq \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \leq \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \leq \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)|$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

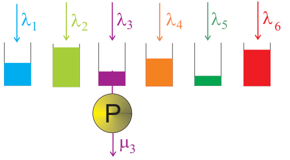
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

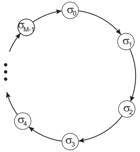
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \le \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ кусочно линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \le \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty; \sup_t w(t) = \sup_t \sum_\sigma \hat{x}_\sigma(t) < \infty$$

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda + c_p \lambda^-_{\sigma_p},$$

$$\text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda^-_\sigma := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \sigma \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \begin{cases} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p) x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ \theta_p x_{\sigma_p} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda + c_p \lambda^-_{\sigma_p},$$

$$\text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda^-_\sigma := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \sigma \\ \\ \\ \end{matrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p)x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ \theta_p x_{\sigma_p} & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda + c_p \lambda^-_{\sigma_p},$$

$$\text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda^-_\sigma := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \sigma \\ \\ \\ \end{matrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p) x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ \theta_p x_{\sigma_p} & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Наблюдение

По оператору T вектор $b = b_T := T(0)$ и матрица $Ax = A_T x := T[x] - b_T$ находятся однозначно и называются вектором сдвига и ядром этого оператора.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

$$T_p(x) = A_p x + \underbrace{\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda + c_p \lambda^-_{\sigma_p}}_{b},$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p) x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ \theta_p x_{\sigma_p} & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1\zeta_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_2\zeta_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda_3\zeta_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{\sigma p-1}\zeta_p & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{\sigma p+1}\zeta_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{\sigma p+2}\zeta_p & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \zeta_p & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\zeta_p & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta_p := \frac{1-\theta_p}{\mu_{\sigma p} - \lambda_{\sigma p}}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \begin{Bmatrix} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p)x_{\sigma p}}{\mu_{\sigma p} - \lambda_{\sigma p}} & \text{если } j \neq \sigma p \\ \theta_p x_{\sigma p} & \text{в противном случае} \end{Bmatrix}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

$$T_p(x) = A_p x + \underbrace{\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda + c_p \lambda^-_{\sigma_p}}_{b},$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{(1-\theta_p) x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ \theta_p x_{\sigma_p} & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$T[x] = T_2[T_1(x)]$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2} = A_{T_2} \left\{ A_{T_1} x + b_{T_1} \right\} + b_{T_2}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2} = A_{T_2} \left\{ A_{T_1} x + b_{T_1} \right\} + b_{T_2}$$
$$= A_{T_2} A_{T_1} x + \left(A_{T_2} b_{T_1} + b_{T_2} \right)$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Композиция произвольного конечного числа монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор, ядро которого получается композицией ядер исходных операторов

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$ и нулевом круизе $c_p := 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Композиция произвольного конечного числа монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор, ядро которого получается композицией ядер исходных операторов

Оператор монодромии $T = T_{M-1} \circ T_{M-2} \circ \cdots \circ T_1 \circ T_0$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$ и нулевым круизам $c_p = 0$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$x(t_{2Mr})$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \dots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \dots = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2} \circ \dots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$
\begin{aligned}
x(t_{2Mr}) &= T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})] \\
&= \cdots = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})] \\
&= T^2[x(t_{2M(r-2)})]
\end{aligned}
$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$
\begin{aligned}
x(t_{2Mr}) &= T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})] \\
&= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})] \\
&= T^2[x(t_{2M(r-2)})] = T^3[x(t_{2M(r-3)})]
\end{aligned}
$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$\begin{aligned} x(t_{2Mr}) &= T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})] \\ &= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})] \\ &= T^2[x(t_{2M(r-2)})] = T^3[x(t_{2M(r-3)})] = \cdots = T^r[x(t_0)] \end{aligned}$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\begin{array}{l|} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array}$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\left.\begin{array}{l} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_*(t_{2M}+t) = x_*(t_0+t) \\ q_*(t_{2M}+t) = q_*(t_0+t) \end{array}\right|$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\left.\begin{array}{l} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_*(t_{2M}+t) = x_*(t_0+t) \\ q_*(t_{2M}+t) = q_*(t_0+t) \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x_*(t) = x_*(t + \underbrace{t_{2M} - t_0}_{\tau}) \\ q_*(t) = q_*(t+\tau) \end{array}\right.$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\overline{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\overline{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

$$x(t_{2Mr+4}) = T_{\overline{p}\oplus 1}[x(t_{2MR+2})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}\oplus 1}[x_*(t_2)] = x(t_4);$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\bar{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\bar{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

$$x(t_{2Mr+4}) = T_{\bar{p}\oplus 1}[x(t_{2MR+2})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\bar{p}\oplus 1}[x_*(t_2)] = x(t_4); x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s), s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r \to \infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r \to \infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T \ldots s}\, x(t_{2Mr+s})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\ldots s}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\ldots s}} x_*(t_s)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_s} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_s} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s)$ $\quad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$

$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_s} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_s} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r \to \infty} x_*(t_s)$ $\quad s = 0, 1, 2, \ldots, 2M - 1$

$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T \ldots s} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r \to \infty} A_{T \ldots s} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, 2M - 1$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_s} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_s} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и нулевым круизам. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_j)$.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)$ $j = 0, \ldots, s-1$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)\ \forall j \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $q^*(t^*_{i^*+j}) = q^*(t^*_{rs+i^*+j}) = q_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)\ \forall j \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$
$\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + t)\ \forall t \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$ $\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + kT_* + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + kT_* + t)\ \forall t \geq 0$, где T_* — период и $t_0 + kT_* \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$
$\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + kT_* + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + kT_* + t)\ \forall t \geq 0$, где T_* — период и $t_0 + kT_* \geq t^*_{i*}$ Подстановка
$\theta := t + t^*_{i*} \Rightarrow q^*(\theta) = q_*(\underbrace{t_0 + kT_* - t^*_{i*}}_{\tau} + \theta), x^*(\theta) = x_*(t_0 + kT_* - t^*_{i*} + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого

$q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta) \ \forall \theta \geq t_{i*}^*$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall\theta \geq t^*_{i*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{i*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{i*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{i*}$ и поэтому
$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)$ $\forall \theta \geq t^*_{j*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{j*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{j*}$ и поэтому
$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{i*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{i*}$ и поэтому
$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$. Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$, то любой процесс сходится к рассматриваемому периодическому процессу. В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига).

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$. Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$, то любой процесс сходится к рассматриваемому периодическому процессу. В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига).

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0$, $c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\ \underbrace{|A_T x|}\ \Big]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0$, $c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\le A_T|x|}\Big]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0$, $c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\leq A_T|x|}\Big] \leq V[A_T|x|]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\leq A_T|x|}\Big] \leq V[A_T|x|] \leq \rho V[|x|]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\le A_T |x|}\Big] \le V[A_T |x|] \le \rho V[|x|] = \rho V[x]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i\to j} = 0$, $c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям и круизам $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{V[x(t)]}{dt} \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)} \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{V[x(t)]}{dt} \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)} \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} \geq \gamma - 1 \text{ если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$V[A_T x]$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x]$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i\to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\,(T[x]) = V\,(T[x(t_0)])$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})]$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

$$= V[x] - (1 - \gamma)(t_{2M} - t_0)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i\to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i\to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0) < V[x] \text{ если } x \neq 0, x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0, c_p = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V(T[x]) = V(T[x(t_0)]) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$
$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0) < V[x] \text{ если } x \neq 0, x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$V[A_T x] < V[x]$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \neq 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \ne 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \ne 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow V[A_T x] \le \rho V[x] \; \forall x \in K_+, x \ne 0$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \neq 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow V[A_T x] \le \rho V[x] \ \forall x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \; \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \; \le \rho < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho\|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\|$$

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \; \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \; \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \; \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x : \|x\| = 1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x : \|x\| = 1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \ \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \ \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \ \leq \rho^r \, \|y_0\| \ \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho\|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\left\|A_T^r y_0\right\| \ \leq \left\|A_T^r\right\| \left\|y_0\right\| \ \leq \left\|A_T\right\|^r \left\|y_0\right\| \ \leq \rho^r \left\|y_0\right\| \ \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \left\|b_T\right\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \ \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \ \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \ \leq \rho^r \, \|y_0\| \ \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

$$\left\| A_T^{\theta} b_T \right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \ \text{ряд} \ \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \ \text{сходится}$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \; \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \; \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\left\|A_T^r y_0\right\| \; \leq \left\|A_T^r\right\| \|y_0\| \; \leq \|A_T\|^r \|y_0\| \; \leq \rho^r \|y_0\| \; \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r \to \infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\left\|A_T^r y_0\right\| \leq \left\|A_T^r\right\| \left\|y_0\right\| \leq \left\|A_T\right\|^r \left\|y_0\right\| \leq \rho^r \left\|y_0\right\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r \to \infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

$$\left\| A_T^{\theta} b_T \right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r \to \infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^\theta b_T\right\| \leq \rho^\theta \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \le \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится } \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*]$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*]$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*] = A_T y_* + b_T$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$