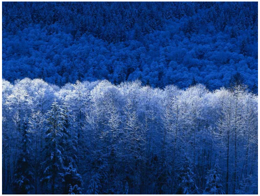
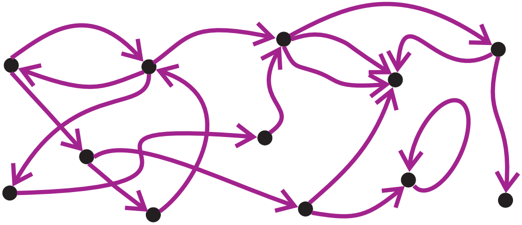
Гибридная динамика информационных и производственных потоков: Динамические переключательные производственные потоковые сети



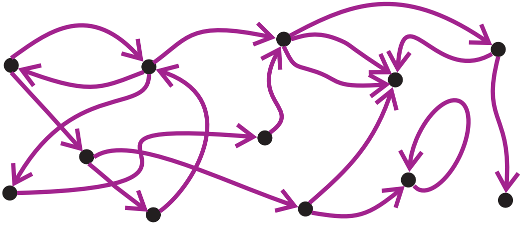
Использованы иллюстрации из
E. Lefeber and J.E. Rooda, Modelling and Analysis of Manufacturing Systems, SE-Report 2006-01, TU/e

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

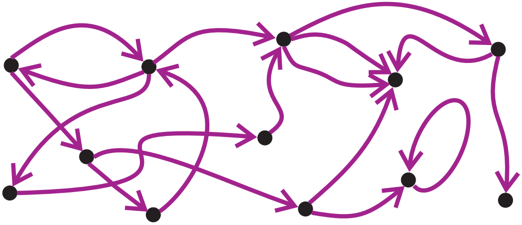


Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



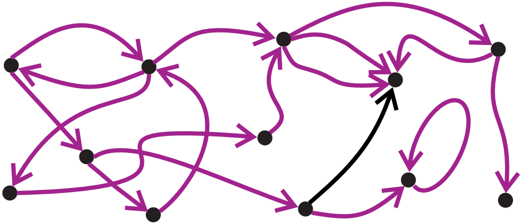
- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

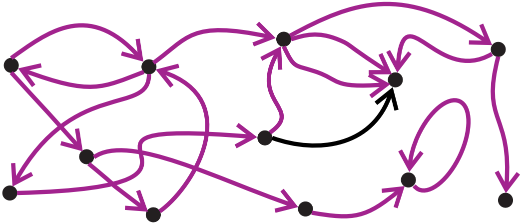


- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС

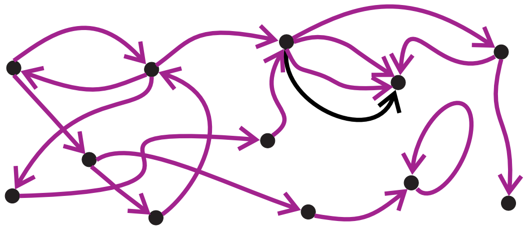


- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени



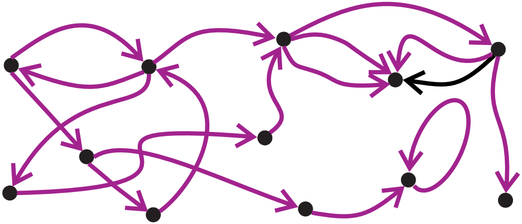
- Динамическая = Не статическая ∼ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная ∼ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



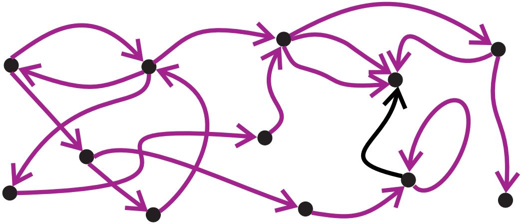
- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППСС



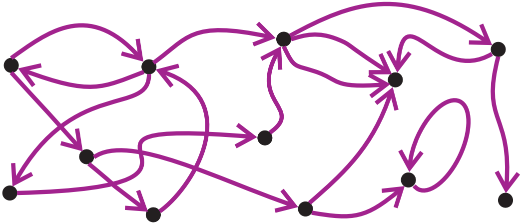
- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени

Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



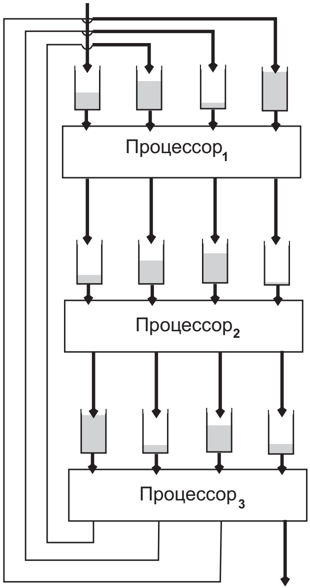
- Динамическая $=$ Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени

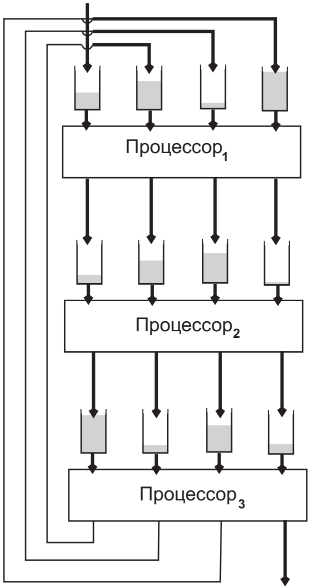
Динамическая переключательная производственная потоковая сеть ДППС



- Динамическая = Не статическая $\sim$ Анализ развивающихся во времени процессов
- Переключательная $\sim$ Топология сети изменяется с течением времени
- Производственная $\sim$ На узлах передаваемое по сети содержимое подвергается определенной обработке

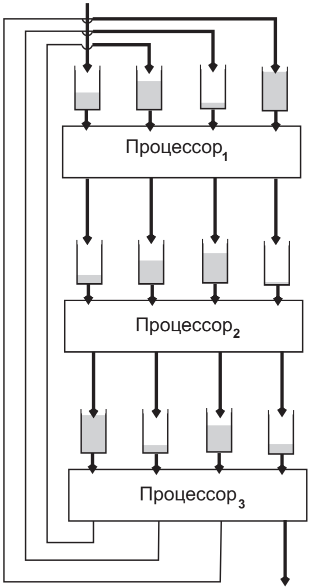
Функционирнование ДППС (пример)





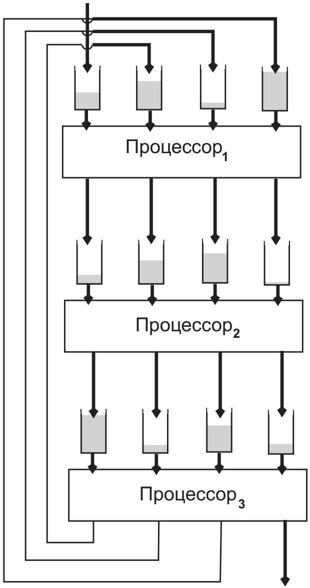
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).

Функционирнование ДППС (пример)



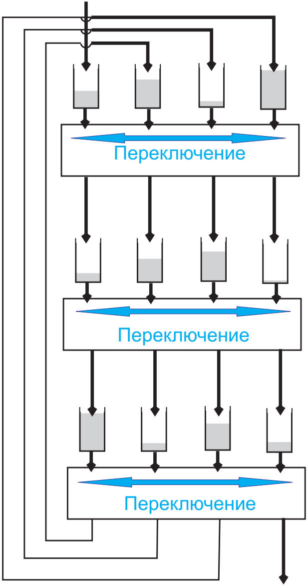
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.

Функционирнование ДППС (пример)



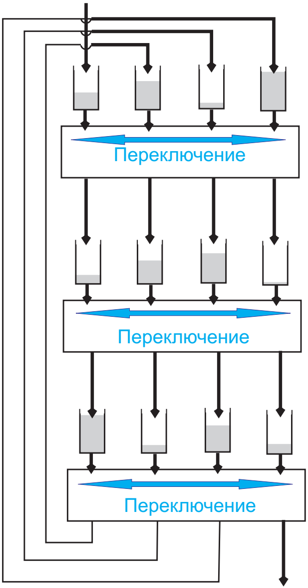
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)

Функционирнование ДППС (пример)



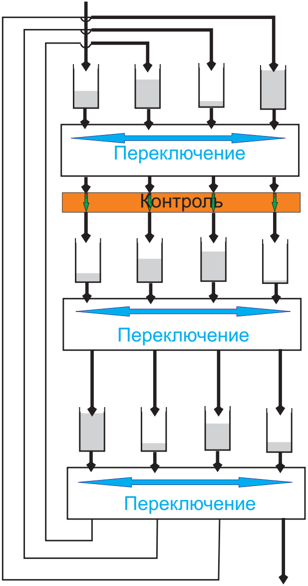
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)

Функционирнование ДППС (пример)



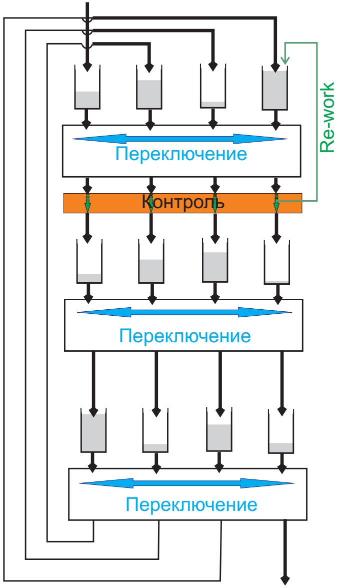
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции

Функционирнование ДППС (пример)



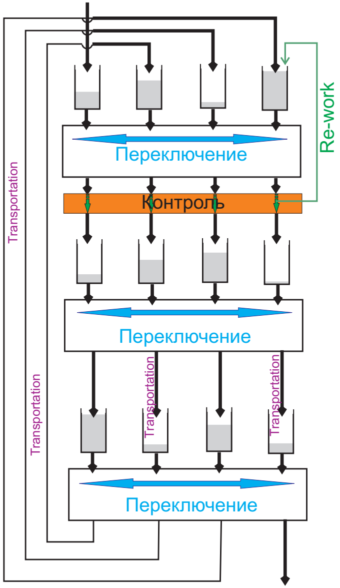
- **Setup time — время установки:** время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- **Breakdown time — время отключения:** время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- **Switching time — время переключения =** Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- **Raw processing time** Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции

Функционирнование ДППС (пример)



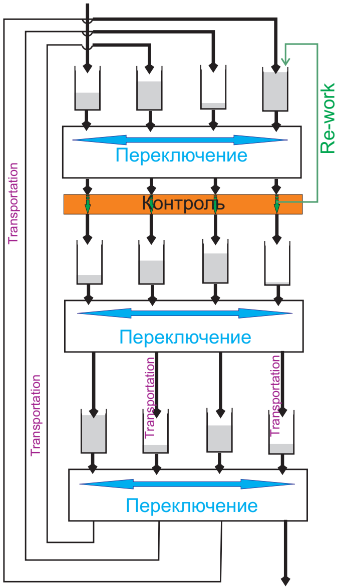
- Setup time — время установки: время инсталляции продукта на данном процессоре, а также настройки процессора на обработку данного продукта (установка инструмента, инициализация программы обработки etc.).
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов

Функционирнование ДППС (пример)



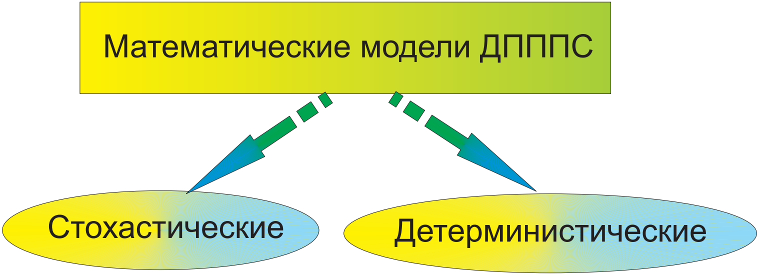
- Setup time — время установки:
- Breakdown time — время отключения: время, необходимое для прекращения работы данного процессора с данным продуктом.
- Switching time — время переключения = Breakdown time + Setup time + задержки (e.g., отсутствие оператора etc.)
- Raw processing time Время, необходимое для выполнения активной фазы операции
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов
- Transportation time (delay) — время транпортировки: время, в течение которого продукт перемещается с одного процессора или пункта хранения (буфера) на другой процессор или пункт хранения

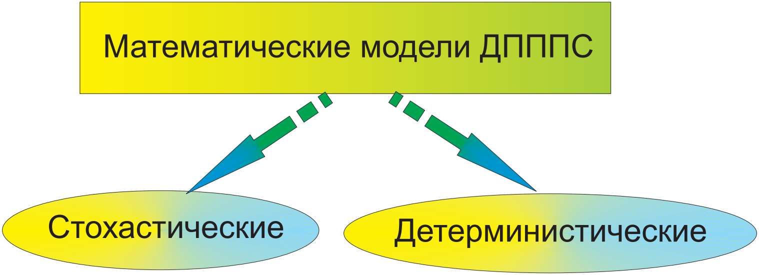
Функционирнование ДППС (пример)

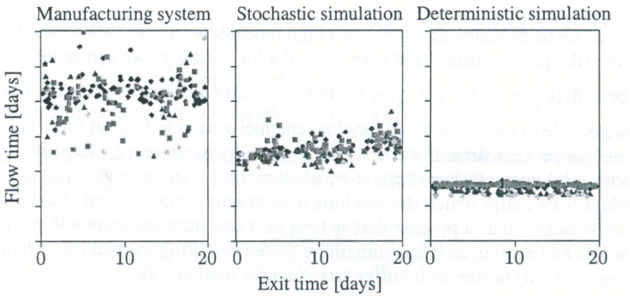


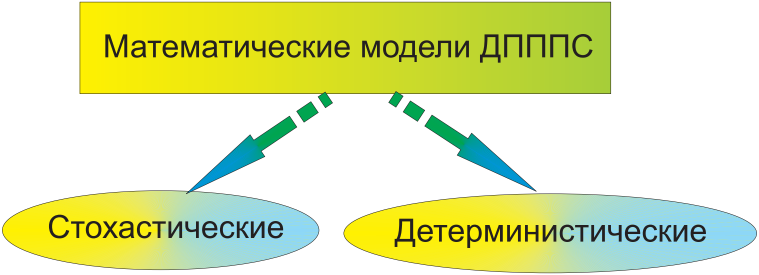
- Setup time — время установки:
- Breakdown time — время отключения:
- Switching time — время переключения
- Raw processing time
- Inspection time — время контроля качества операции
- Re-work time — время на устранение дефектов
- Transportation time (delay) — время транпортировки: время, в течение которого продукт перемещается с одного процессора или пункта хранения (буфера) на другой процессор или пункт хранения
- Flow time — потоковое время: общее время, в течение которого продукт находился в сети или в пределах отдельной части сети, например, обрабатывался на данном процессоре (время ожидания во входном буфере включается)

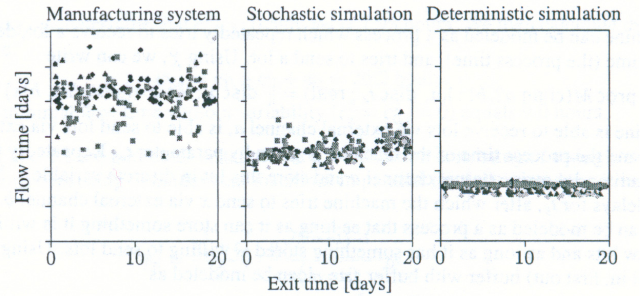
Математическое моделирование ДППС


Математические модели ДПППС
Стохастические
Детерминистические


Математические модели ДПППС
Стохастические
Детерминистические

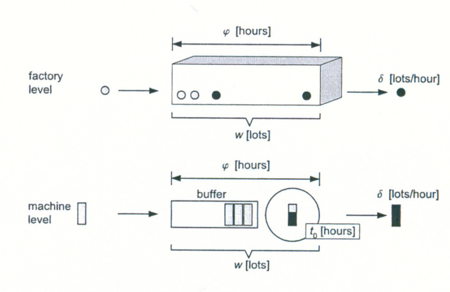

Manufacturing system
Stochastic simulation
Deterministic simulation
Flow time [days]
0
10
20
Exit time [days]


Математические модели ДПППС
Стохастические
Детерминистические

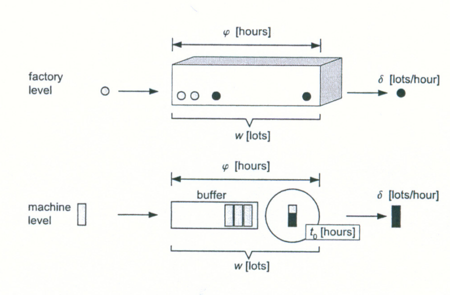

Manufacturing system
Stochastic simulation
Deterministic simulation
Flow time [days]
Exit time [days]
0
10
20

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

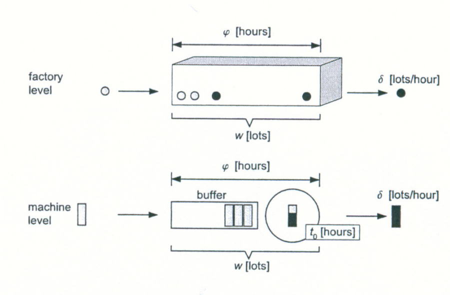


Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

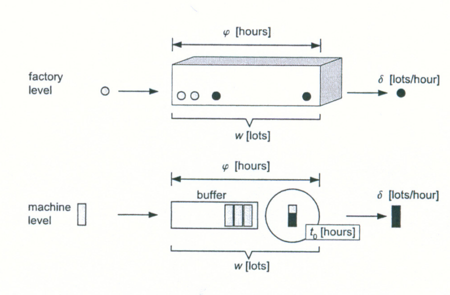
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени

- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

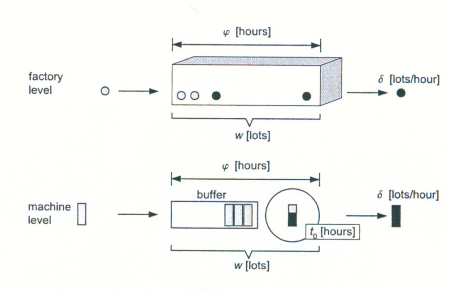
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети

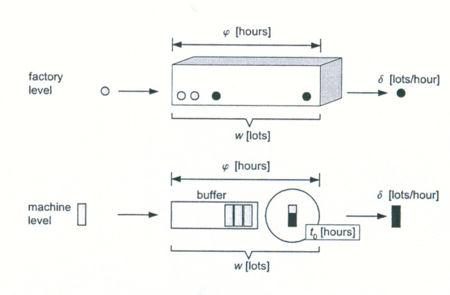
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС



- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов

- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

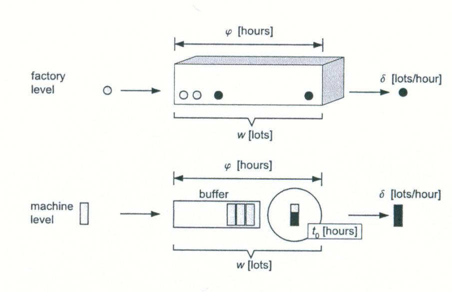
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

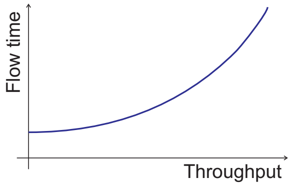


- Lots, jobs, products — лоты, работа, продукты — то, что перемещается по ветвям сети и обрабатывается на узлах

- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

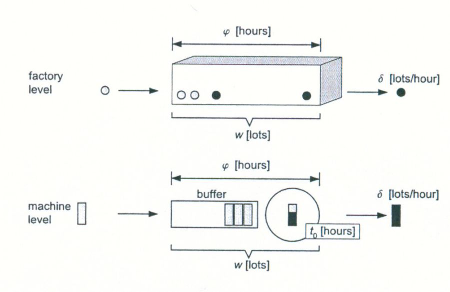
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

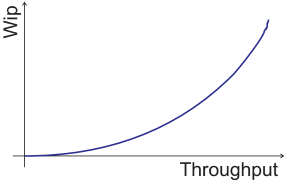




- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

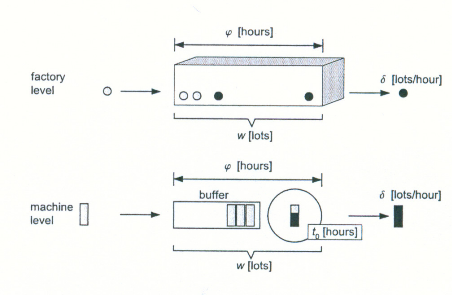
Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

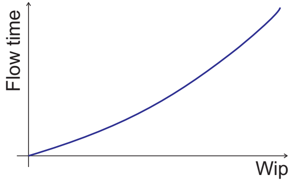




- Throughput δ — проводимость: Колическтво лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

Основные величины, характеризующие качество работы ДППС

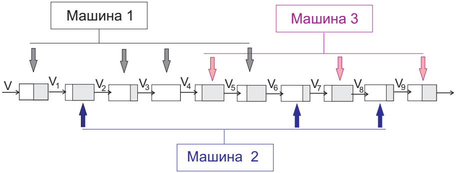




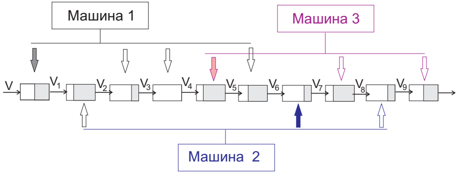
- Throughput δ — проводимость: Количество лотов, покидающих сеть за единицу времени
- Flow time φ — потоковое время: Время пребывания лота в сети
- Work in progress (wip) w: Общее число находящихся в сети лотов
- Utilization u — коэффициент утилизации (использования): Доля времени, в течение которого процессор работает (не простаивает). Измеряется в процентах.

Управление ДПППС

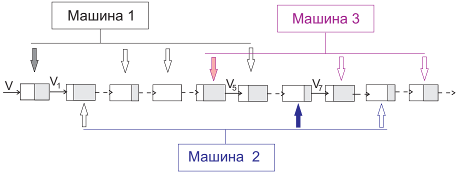
Управление ДППС



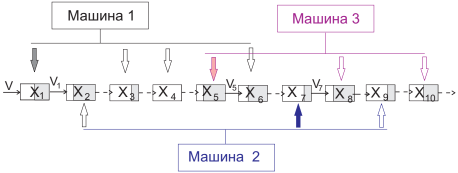
Управление ДППС



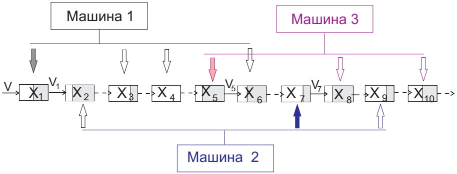
Управление ДППС



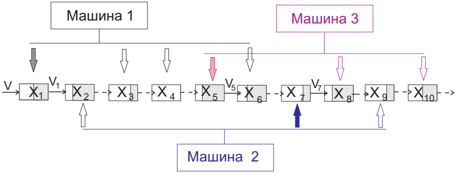
Управление ДППС



Управление ДППС



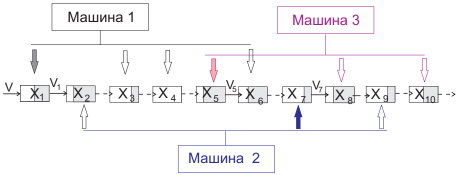
$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?

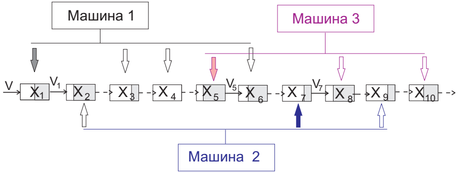
Управление ДПППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?

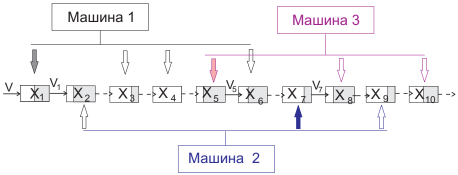
Управление ДППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДПППС

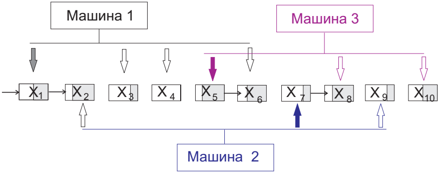


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС

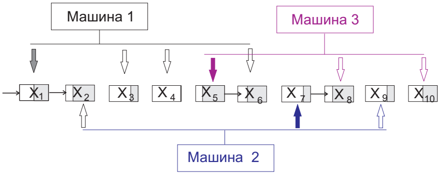


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДПППС

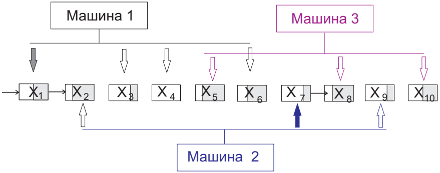


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

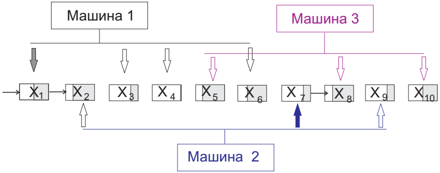
Управление ДППС



$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = -v_5$$
$$\dot{x}_6 = v_5 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

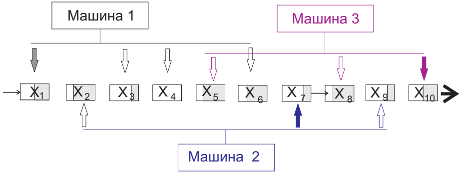


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = 0$$
$$\dot{x}_6 = 0 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = 0$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДПППС

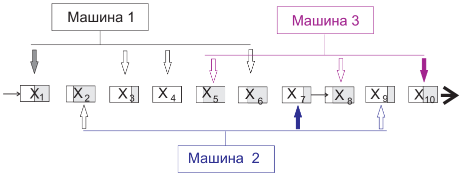


$$\dot{x}_1 = v - v_1 \quad \dot{x}_2 = v_1 \quad \dot{x}_3 = 0 \quad \dot{x}_4 = 0 \quad \dot{x}_5 = 0$$
$$\dot{x}_6 = 0 \quad \dot{x}_7 = -v_7 \quad \dot{x}_8 = v_7 \quad \dot{x}_9 = 0 \quad \dot{x}_{10} = -v_{10}$$

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДПППС



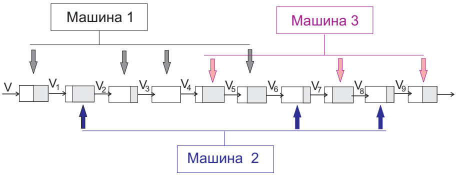
$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС



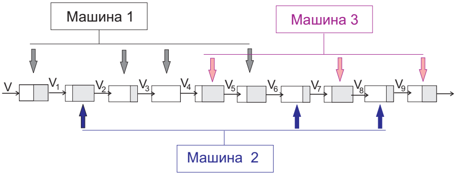
$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Что делать, если обрабатываемый буфер опустошен?
- Когда данная машина должна прекращать обслуживание данного буфера и переключаться в другой буфер и в какой именно?
- На какой скорости обслуживать данный буфер?

Управление ДППС



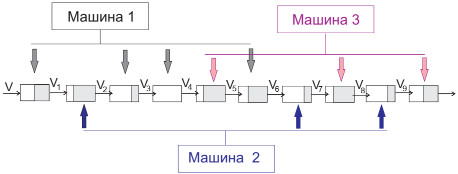
$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Протокол называется устойчивым, если $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$.

Управление ДПППС



$$\delta_{i \mapsto j}$$

Время, необходимое для переключения из буфера i в буфер j

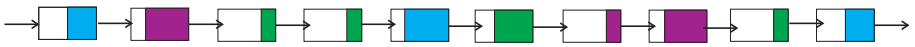
Algorithm, policy, protocol, discipline of switching (scheduling)
Алгоритм (политика, протокол) переключения

- Протокол называется устойчивым, если $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$.
- Когда существует устойчивый протокол и в чем он состоит?

Типы ДППС

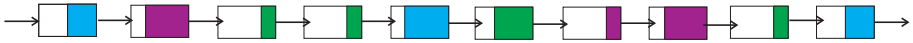
Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

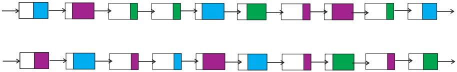


Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

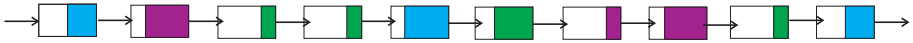


- Сеть с параллельными потоками

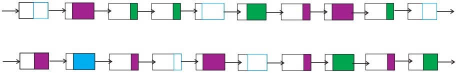


Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

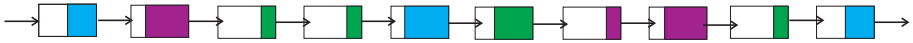


- Сеть с параллельными потоками

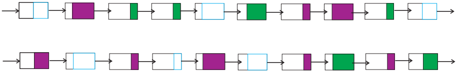


Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

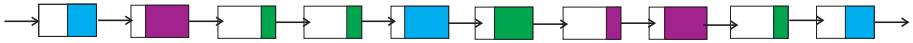


- Сеть с параллельными потоками

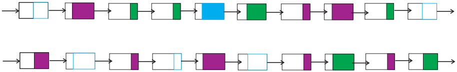


Типы ДПППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

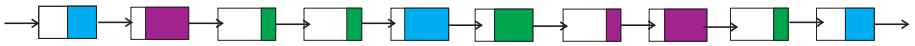


- Сеть с параллельными потоками

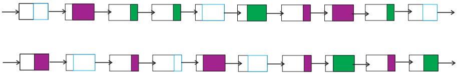


Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

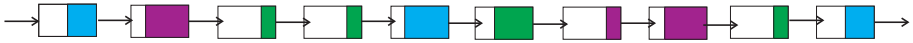


- Сеть с параллельными потоками

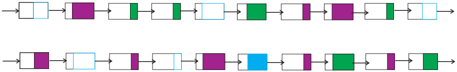


Типы ДППС

- Линейная сеть (однопотоковая сеть)

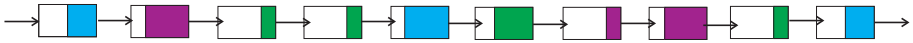


- Сеть с параллельными потоками

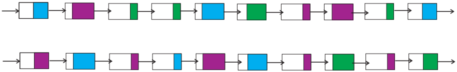


Типы ДППС

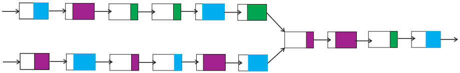
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



- Сеть с параллельными потоками

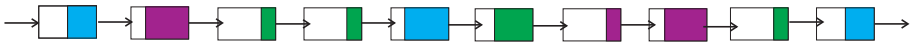


- Сеть со сливающимися потоками

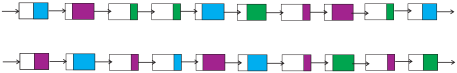


Типы ДППС

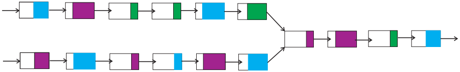
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



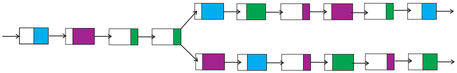
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками



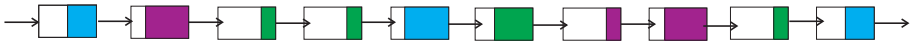
- Ветвящаяся сеть



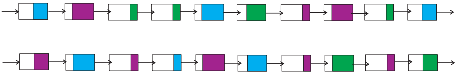
Типы ДППС

Циклические сети

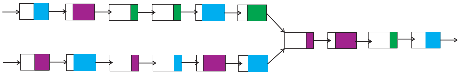
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



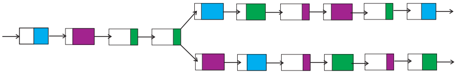
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками



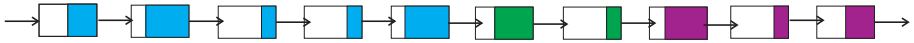
- Ветвящаяся сеть



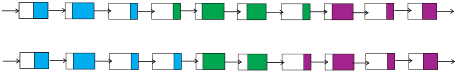
Типы ДППС

Ациклические сети

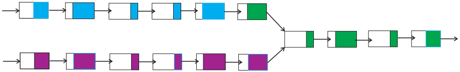
- Линейная сеть (однопотоковая сеть)



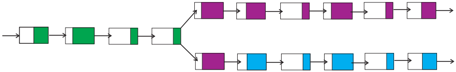
- Сеть с параллельными потоками



- Сеть со сливающимися потоками

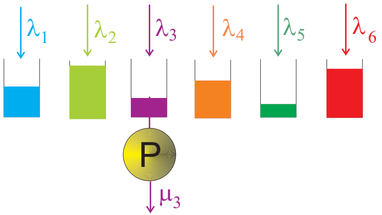


- Ветвящаяся сеть

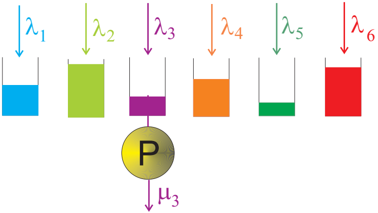


Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)

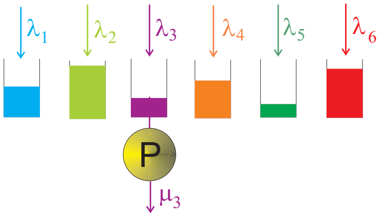


Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



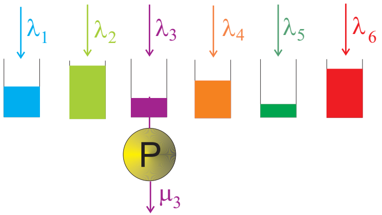
- Система состоит из n буферов и одного процессора.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



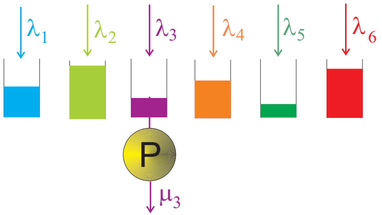
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



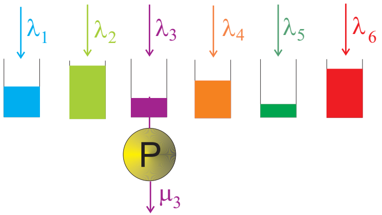
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.

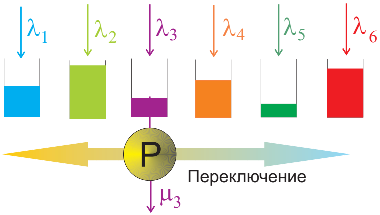
Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.

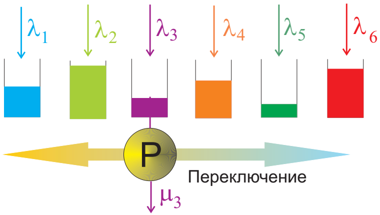
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



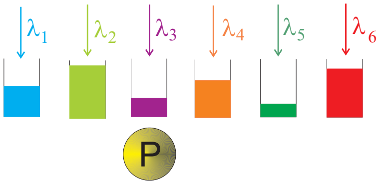
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



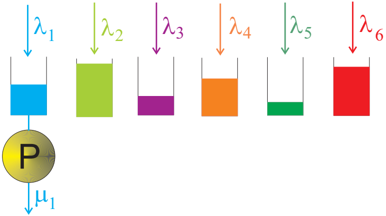
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



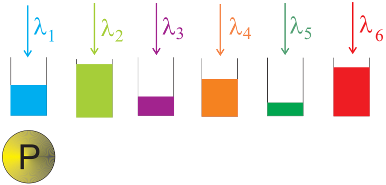
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



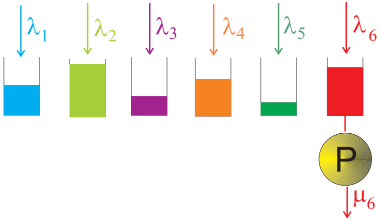
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



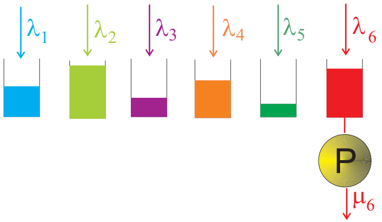
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



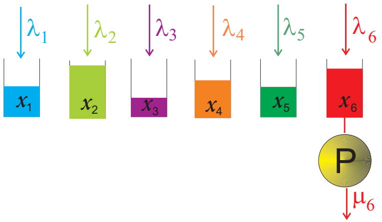
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



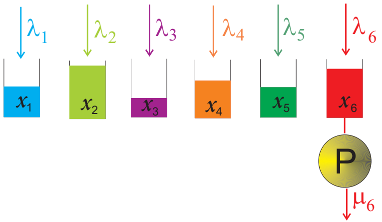
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



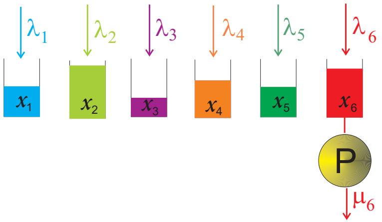
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



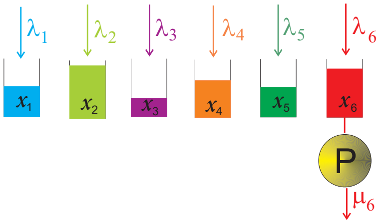
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \ldots, n, \ominus$:

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



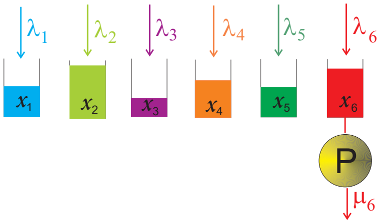
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \ldots, n$, $\ominus$: $q = 1, \ldots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер;

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



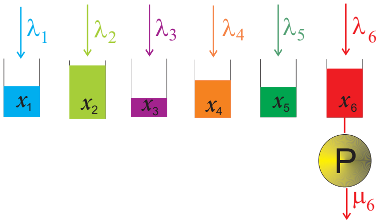
- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \leq u_i(t) \leq \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \dots, n, \ominus$: $q = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.

Многопотоковая одно-серверная ДПППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i \to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \dots, n, \ominus$: $q = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.
- Полное состояние (x, q).

Многопотоковая одно-серверная ДППС (Single machine multi-flow system)



- Система состоит из n буферов и одного процессора.
- Содержимое буферов называется работой и интерпретируется как жидкость
- Работа поступает в i-ый буфер непрерывно с постоянной скоростью $\lambda_i > 0$.
- В каждый момент процессор может обслуживать не более одного буфера.
- Обслуживание i-го буфера состоит в извлечении из него содержимого со скоростью $0 \le u_i(t) \le \mu_i$, где $\mu_i > 0$ — заданная константа.
- Положение процессора определяется политикой переключения.
- Время переключения из i-го в j-ый буфер равно $\tau_{i\to j} > 0$.
- Непрерывное состояние $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_i — содержимое i-го буфера.
- Дискретное состояние $q = 1, \dots, n, \ominus$: $q = 1, \dots, n \Leftrightarrow$ обслуживается q-ый буфер; $q = \ominus \Leftrightarrow$ процессор простаивает.
- Полное состояние (x, q).
- Процесс — пара функций времени $[x(\cdot), q(\cdot)]$.

Строгое определение процесса

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i \geq 0}$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i \geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i \geq 0}$. Значение $q(t) = q_i$ поддерживается на интервале с концами $t_i \leq t_{i+1}$.

Строгое определение процесса

Определение

Пусть $q(\cdot)$ — кусочно постоянная функция времени.

- Символьная последовательность $\{q_i\}_{i\geq 0}$ — последовательность значений, принимаемых этой функцией с течением времени.
- Момент переключения — момент t, когда функция меняет значение $q(t-0) \neq q(t+0)$.

Наблюдение

Моменты переключения образуют монотонную последовательность $\{t_i\}_{i\geq 0}$. Значение $q(t) = q_i$ поддерживается на интервале с концами $t_i \leq t_{i+1}$.

Пояснение

Если значение q_i пробегается мгновенно, то $t_i = t_{i+1}$.

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна,

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \dots, n$ верны следующие соотношениям:

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \ldots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \ldots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma - u_\sigma(t), \quad \text{где} \quad 0 \le u_\sigma(t) \le \mu_\sigma, \quad \text{если} \quad q(t) = \sigma,$$

Строгое определение процесса

Определение

Процесс — пара функций $[x(\cdot), q(\cdot)]$, заданных на общем интервале с левым концом $t_0 \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих следующим требованиям:

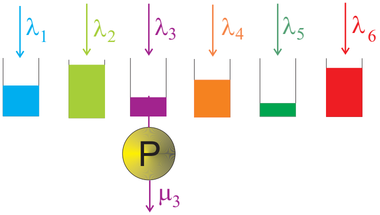
- Функция $q(\cdot)$ кусочно постоянна и $q(t_0) \neq \ominus$;
- Нечетные члены ее символьной последовательности равны символу простоя $q_{2i+1} = \ominus$, а четные отличны от него;
- $t_{i+1} - t_i = \tau_{q_{i-1} \to q_{i+1}}$ для нечетных i;
- Функция $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, причем для любого буфера $\sigma = 1, \dots, n$ верны следующие соотношениям:

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma \quad \text{если} \quad q(t) \neq \sigma,$$

$$\dot{x}_\sigma(t) = \lambda_\sigma - u_\sigma(t), \quad \text{где} \quad 0 \leq u_\sigma(t) \leq \mu_\sigma, \quad \text{если} \quad q(t) = \sigma,$$

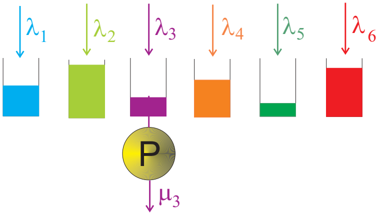
$$x_\sigma(t) \geq 0 \qquad \forall t.$$

Комментарий к определению процесса



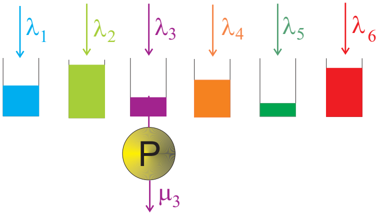
На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Комментарий к определению процесса



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

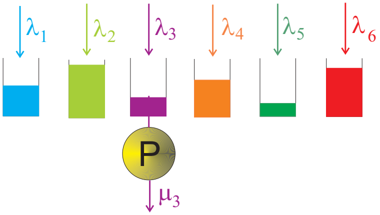
Комментарий к определению процесса



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;

Комментарий к определению процесса

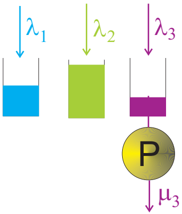


На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;

Комментарий к определению процесса

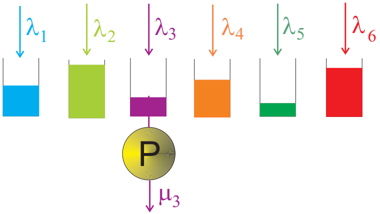


На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Комментарий к определению процесса



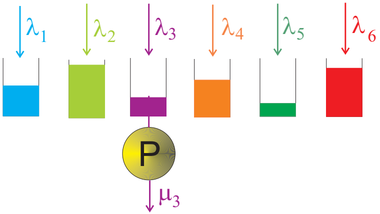
На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).

Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Далее будет введен и исследован некоторый класс подобных правил.

Комментарий к определению процесса



На практике процесс обычно задается политикой переключения (scheduling discipline).
Это правило, определяющее

- текущую скорость (rate) $u_\sigma(t)$ обслуживания (service) текущего буфера;
- момент прекращения обслуживания текущего буфера;
- выбор следующего обслуживаемого буфера.

Далее будет введен и исследован некоторый класс подобных правил. Вместе с тем нам не потребуется общее определение политики переключения.

Необходимое условие устойчивости

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

- неустойчивым в противном случае

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

Необходимое условие устойчивости

Определение

Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$

- неустойчивым в противном случае

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

- сильно неустойчивым, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

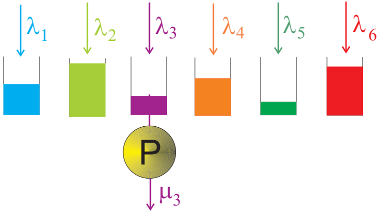
Необходимое условие устойчивости

Определение

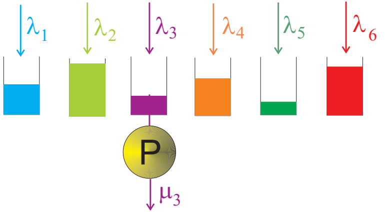
Заданный на неограниченном вправо интервале процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется

- устойчивым, если для него Wip остается ограниченным при $t \to \infty$
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty, \quad \text{где} \quad w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t);$$
- неустойчивым в противном случае
$$\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$
- сильно неустойчивым, если
$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty;$$

Необходимое условие устойчивости



Необходимое условие устойчивости

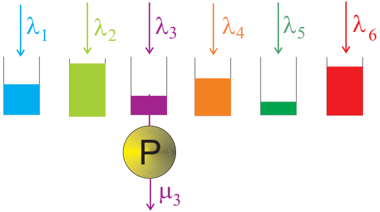


Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

Необходимое условие устойчивости



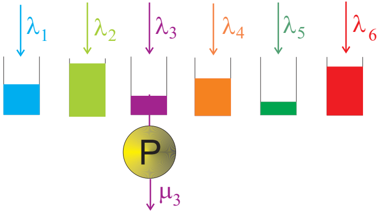
Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Необходимое условие устойчивости



Теорема

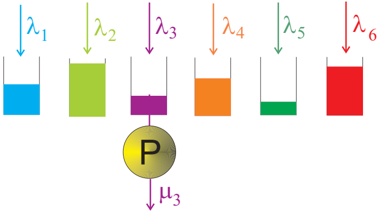
Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty \quad$ при $\quad t \to \infty$.
Соответственно для существования хотя бы одного устойчивого процесса необходимо выполнение противоположного неравенства

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1. \tag{1}$$

Необходимое условие устойчивости



При выполнении неравенства (1) существует политика переключения, порождающая только устойчивые процессы

Теорема

Пусть число буферов $n \geq 2$. Если

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma \geq 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma},$$

то все процессы сильно неустойчивы:
$w(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.
Соответственно для существования хотя бы одного устойчивого процесса необходимо выполнение противоположного неравенства

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1. \tag{1}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ – константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \leq W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \leq \alpha_2 V(t)$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ – константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \leq W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \leq \alpha_2 V(t)$$

Достаточно взять

$$\alpha_1 := \min_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}, \qquad \alpha_2 := \max_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ – константы}$$

Лемма

Существуют такие константы $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, что

$$\alpha_1 V(t) \le W(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma(t) \le \alpha_2 V(t)$$

Достаточно взять

$$\alpha_1 := \min_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}, \qquad \alpha_2 := \max_{\sigma=1,\ldots,n} \frac{1}{\omega_\sigma}$$

Следствие

$\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} W(t) = \infty$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\omega_\sigma}, \qquad \omega_\sigma > 0 \text{ — константы}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \circleddash \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \circleddash \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \circleddash$, то

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot V(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot x_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot x_s(t)}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot{x}_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - u_s(t)}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot V(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot x_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot x_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \overbrace{u_s(t)}^{\leq \mu_s}}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = s \neq \ominus$, то

$$\dot V(t) = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\dot x_\sigma(t)}{\mu_\sigma} + \frac{\dot x_s(t)}{\mu_s} = \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \overbrace{u_s(t)}^{\leq \mu_s}}{\mu_s} \geq \sum_{\sigma \neq s} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} + \frac{\lambda_s - \mu_s}{\mu_s}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство:

Если $q(t) = \ominus$, то

$$\dot{V}(t) = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\dot{x}_\sigma(t)}{\mu_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

$$V(t) := \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{x_\sigma(t)}{\mu_\sigma},$$

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t \Rightarrow V(t) \geq V(0) + (\gamma - 1)(t - t_0)$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Предположим, что $\gamma > 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \geq \gamma - 1 > 0 \qquad \forall t \Rightarrow V(t) \geq V(0) + (\gamma - 1)(t - t_0) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases}$$

,

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq \gamma-1 & \text{если } q(t)\neq \ominus\\ =\gamma & \text{если } q(t)=\ominus\end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma=\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot V(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t)\neq \ominus\\ =\gamma>0 & \text{если } q(t)=\ominus\end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t)\geq V(t_0)+\gamma \operatorname{mes}\{t: q(t)=\ominus\}$$

, где mes — мера Лебега.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq \gamma-1 & \text{если } q(t)\neq\ominus\\ =\gamma & \text{если } q(t)=\ominus\end{cases},\quad \text{где}\quad \gamma=\sum_{\sigma=1}^{n}\frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t)\neq\ominus\\ =\gamma>0 & \text{если } q(t)=\ominus\end{cases}\Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t)\geq V(t_0)+\gamma\,\mathrm{mes}\{t: q(t)=\ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t)<\infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t: q(t)=\ominus\}<\infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot V(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases} \Rightarrow \varlimsup_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varlimsup_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

$$\dot{V}(t)\begin{cases}\geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus\end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Обоснование необходимого условия устойчивости: метод функций Ляпунова

Лемма

$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}$$

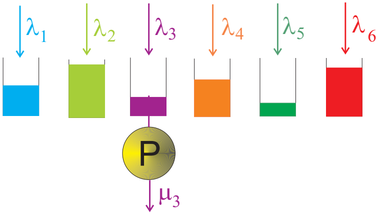
Доказательство теоремы:

Осталось рассмотреть случай, когда $\gamma = 1$. Тогда

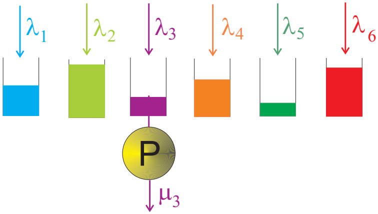
$$\dot{V}(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{если } q(t) \neq \ominus \\ = \gamma > 0 & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases} \Rightarrow \varliminf_{t\to\infty} V(t) \geq V(t_0) + \gamma \mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\}$$

, где mes — мера Лебега. Если заключение Теоремы неверно, то $\varliminf_{t\to\infty} V(t) < \infty$ и значит $\mathrm{mes}\{t : q(t) = \ominus\} < \infty$. Так как длительность любого переключения положительна, их число конечно, то есть начиная с некоторого момента t_1 процессор обслуживает только один буфер s. Но тогда содержимое другого буфера неограниченно возрастает и значит $\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty$.

Достаточное условие устойчивости

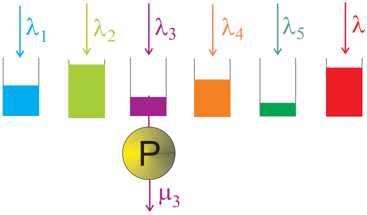


Достаточное условие устойчивости



$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

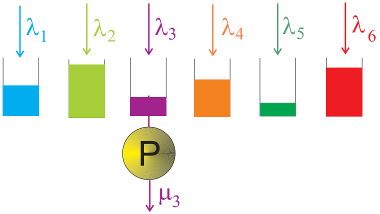
Достаточное условие устойчивости



$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует политика переключения со следующими свойствами:

Достаточное условие устойчивости

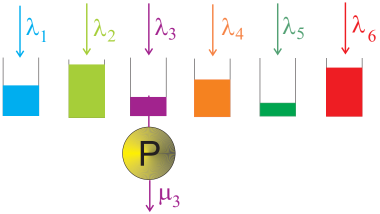


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия существует политика переключения со следующими свойствами:

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;

Достаточное условие устойчивости

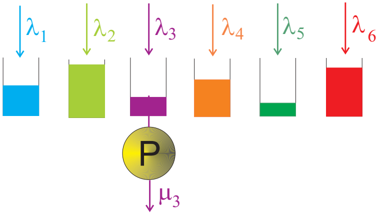


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия существует политика переключения со следующими свойствами:

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);

Достаточное условие устойчивости

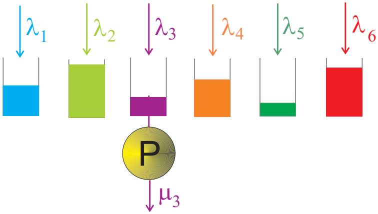


$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \tag{1}$$

При выполнении этого условия существует политика переключения со следующими свойствами:

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);
- Все процессы сходятся к периодическому с течением времени.

Достаточное условие устойчивости



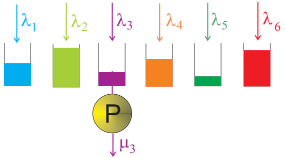
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия существует политика переключения со следующими свойствами:

- Все процессы устойчивы $\overline{\lim}_{t\to\infty} w(t) < \infty$;
- Существует периодический процесс и он единственен (с точностью до сдвига по времени);
- Все процессы сходятся к периодическому с течением времени.

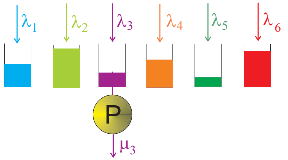
Эта политика будет описана явным образом.

Достаточное условие устойчивости



Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Достаточное условие устойчивости

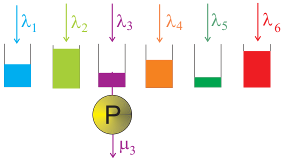


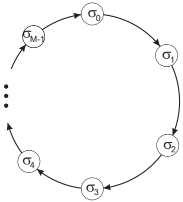
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i\, \forall i$.

Достаточное условие устойчивости



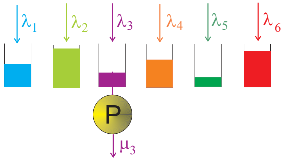


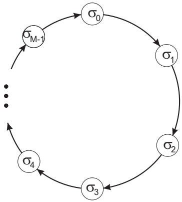
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

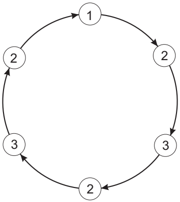
Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Достаточное условие устойчивости





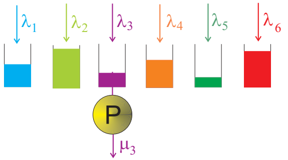


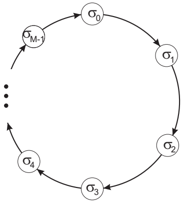
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

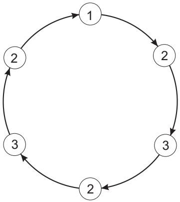
Определение

Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \; \forall i$.

Достаточное условие устойчивости







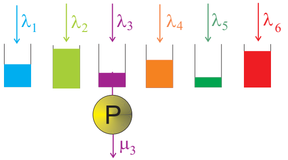
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

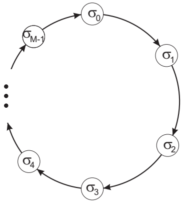
Определение

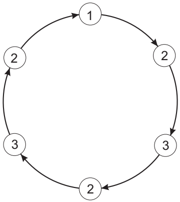
Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

Один и тот же буфер может встречаться несколько раз.

Достаточное условие устойчивости







Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

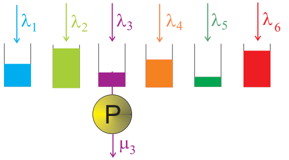
Определение

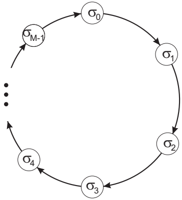
Цикл обслуживания — конечная последовательность буферов $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$, в которой каждый буфер встречается как минимум однажды и $\sigma_{i+1} \neq \sigma_i \, \forall i$.

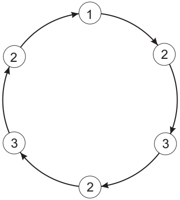
Один и тот же буфер может встречаться несколько раз.

Удобно рассматривать индекс i в выражении σ_i как элемент кольца вычетов $\mathrm{mod}\ M$.

Достаточное условие устойчивости



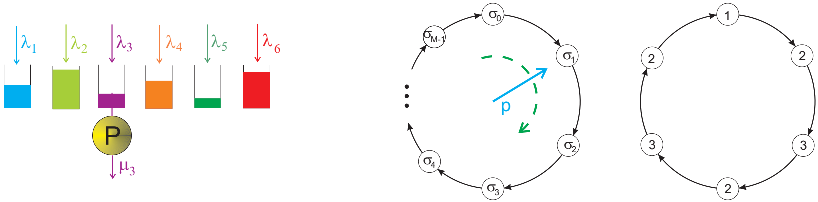




Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Политика использует внутреннюю целую ($\bmod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла.

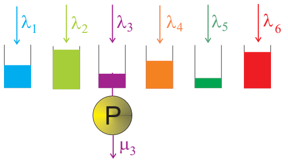
Достаточное условие устойчивости

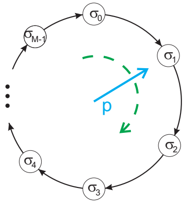


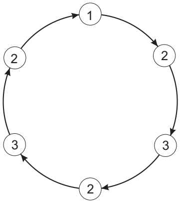
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла.

Достаточное условие устойчивости

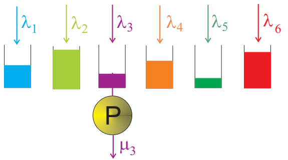


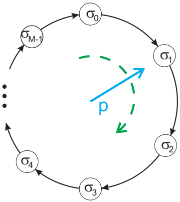


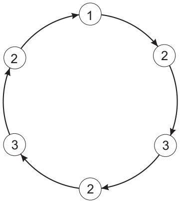


Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.





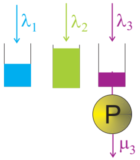


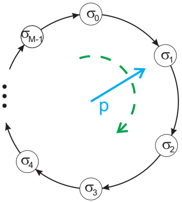
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

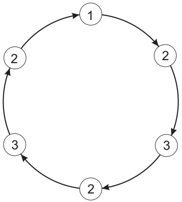
Политика использует внутреннюю целую ($\mathrm{mod}\ M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;

Достаточное условие устойчивости





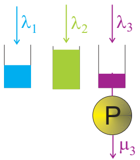


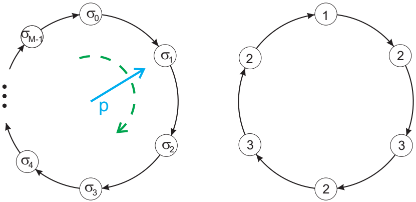
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$;

Достаточное условие устойчивости



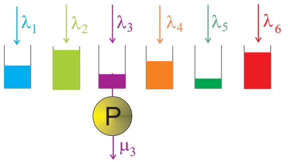


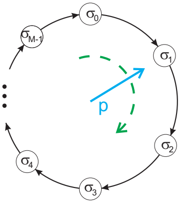
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

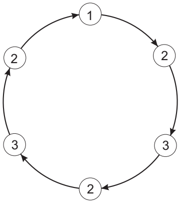
Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$;
- Обслуживание буфера σ прекращается в момент его опустошения (очистки) $x_\sigma(t) = 0$;

Достаточное условие устойчивости





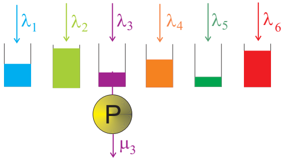


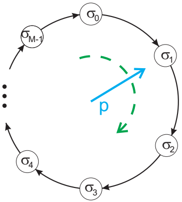
Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

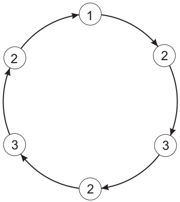
Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$;
- Обслуживание буфера σ прекращается в момент его опустошения (очистки) $x_\sigma(t) = 0$;
- В этот момент $p := p + 1(\mod M)$ и процессор переключается в буфер σ_p.

Достаточное условие устойчивости







Циклическая политика с очисткой буферов
Cyclic clearing scheduling discipline

Политика использует внутреннюю целую ($\mod M$) переменную p, задающую текущую фазу цикла. Начальное значение $p = p_0$ задано.

- Работа начинается с буфера σ_{p_0} при $p := p_0$;
- Текущий буфер σ обслуживается на максимальной скорости $u_\sigma := \mu_\sigma$;
- Обслуживание буфера σ прекращается в момент его опустошения (очистки) $x_\sigma(t) = 0$;
- В этот момент $p := p + 1(\mod M)$ и процессор переключается в буфер σ_p.

Политика однозначно определяет процесс $[x(\cdot), u(\cdot)]$ по начальным данным $x(0) = x_0, p(0) = p_0$.

Технические определения

Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t + T) = x(t),\ q(t + T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \le t_{s+1}$ целое $s \ge 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \ge 1$.

Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t + T) = x(t),\ q(t + T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо.

Технические определения

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$

Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \le t_{s+1}$ целое $s \ge 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \ge 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$
- $\lim_{r \to +\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s.$

Технические определения

Определение

Путь $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Последовательность $\{t_i\}$ является s-периодической: $t_{i+s} = t_i, i \geq 1$.

Определение

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$, заданный на интервале, неограниченном вправо. Скажем, что процесс $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ сходится к $[x(\cdot), q(\cdot)]$ при $t \to \infty$, если существует такое целое $i_* > 0$ (сдвиг по фазе), что

- $q(t_i) = \hat{q}(\hat{t}_{i+i_*}) \quad \forall i = 0, 1, 2, 3, \ldots;$
- $\lim_{r \to +\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s.$

Наблюдение

Для процессов, порожденных общей циклической политикой, первое свойство заведомо верно.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ \ q(t+T) = q(t)\ \forall t$.

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс.

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t+T) = x(t),\ \ q(t+T) = q(t)\ \forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)

Технические определения (продолжение)

Определение

Процесс $[x(\cdot), q(\cdot)]$ называется периодическим, если он определен на неограниченном вправо интервале и существует такое $T > 0$ что $x(t + T) = x(t), \; q(t + T) = q(t) \; \forall t.$

Определение

Пусть $T > 0$ — минимальный период и $\{t_i\}$ — последовательность моментов переключения периодического процесса. Определяемое неравенствами $t_s < T \leq t_{s+1}$ целое $s \geq 0$ называется порядком процесса.

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t + \tau), q(t + \tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Технические определения (продолжение)

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Определение

- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.

Технические определения (продолжение)

Наблюдение

Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Определение

- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.
- Общий минимальный период и порядок этих сдвигов называются минимальным периодом и порядком предельного цикла.

Технические определения (продолжение)

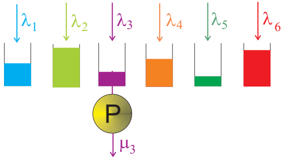
Наблюдение

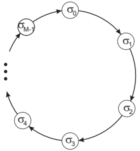
Будем рассматривать процессы $[x(\cdot), q(\cdot)]$, порожденные циклической политикой. Так как эта политика инвариантна по времени, временной сдвиг процесса $[x_\tau(t), q_\tau(t)] := [x(t+\tau), q(t+\tau)] \quad \forall t$ —снова процесс. (Строго говоря, это верно, если новый процесс не начинается в состоянии простоя процессора. Соответствующий сдвиг назовем допустимым.)
Допустимый сдвиг периодического процесса — периодический процесс с тем же минимальным периодом и порядком.

Определение

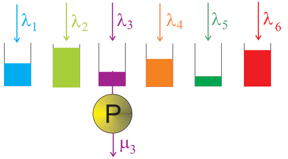
- Совокупность всех допустимых сдвигов периодического процесса называется предельным циклом.
- Общий минимальный период и порядок этих сдвигов называются минимальным периодом и порядком предельного цикла.
- Процесс сходится к предельному циклу, если он сходится к любому из составляющих цикл периодических процессов.

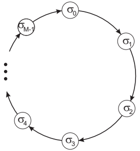
Устойчивость циклической политики





Устойчивость циклической политики

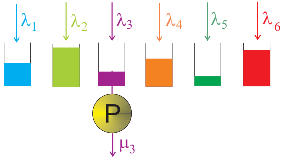


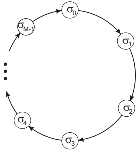


Теорема

Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов.

Устойчивость циклической политики





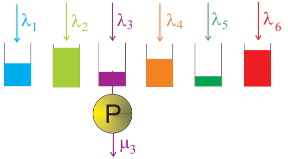
Теорема

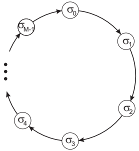
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов. Если выполнено условие устойчивости

$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

Устойчивость циклической политики





Теорема

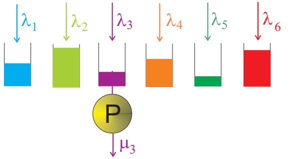
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов. Если выполнено условие устойчивости

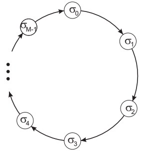
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;

Устойчивость циклической политики





Теорема

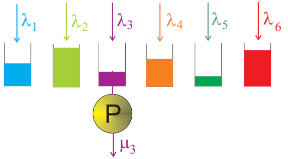
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов. Если выполнено условие устойчивости

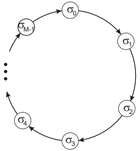
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;

Устойчивость циклической политики





Теорема

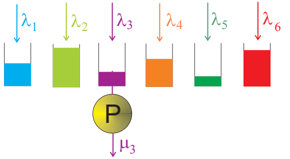
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов. Если выполнено условие устойчивости

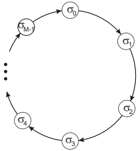
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Устойчивость циклической политики





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

Теорема

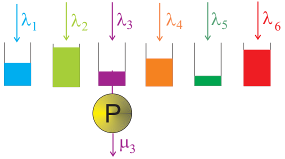
Выберем некоторый цикл обслуживания $\Sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{M-1})$ и снабдим n-буферную систему соответствующей циклической политикой с очисткой буферов. Если выполнено условие устойчивости

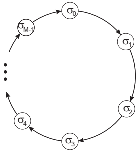
$$\gamma := \sum_{\sigma=1}^{n} \gamma_\sigma < 1, \quad \text{где} \quad \gamma_\sigma := \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma}, \tag{2}$$

то справедливы следующие утверждения:

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен и его порядок не превосходит M;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Обоснование Следствия





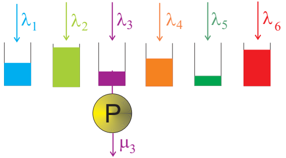
Следствие

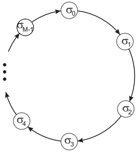
Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Обоснование Следствия





Следствие

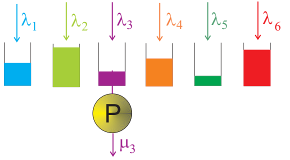
Все процессы устойчивы

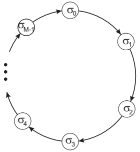
$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

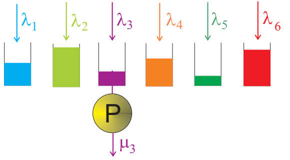
Все процессы устойчивы

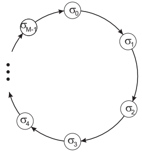
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу.

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

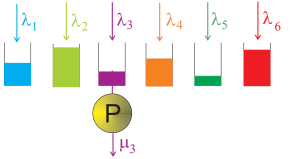
Все процессы устойчивы

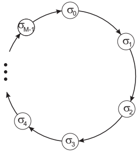
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\; w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

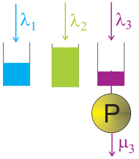
$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

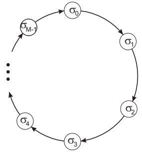
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\; w(t) < \infty$$

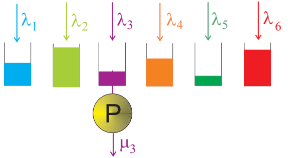
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

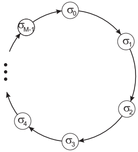
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

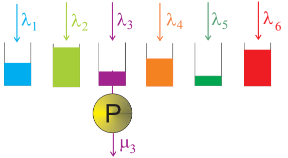
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

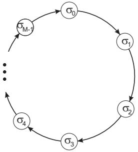
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\dots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$.

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} w(t) < \infty$$

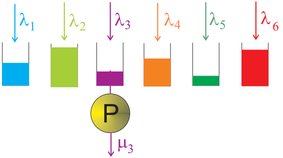
- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

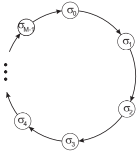
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\varlimsup_{t\to\infty} w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

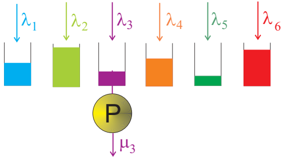
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

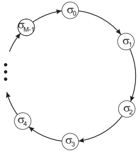
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\dots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\}$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

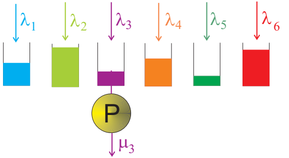
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

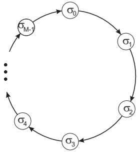
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

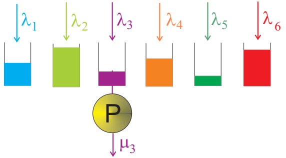
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

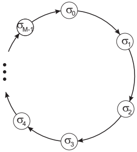
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \leq \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \leq \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

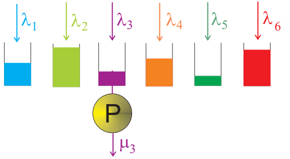
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

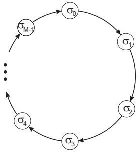
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \le \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)|$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

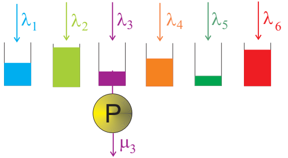
Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

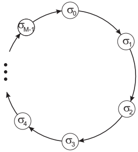
$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\ldots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \le \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$$

Обоснование Следствия





Следствие

Все процессы устойчивы

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, w(t) < \infty$$

- В системе возникает предельный цикл;
- Предельный цикл единственен;
- Все процессы сходятся к этому циклу. По определению сходимости

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — периодический процесс с последовательностью моментов переключения $\{t_i\}$ и порядком s, а $[\hat{x}(\cdot), \hat{q}(\cdot)]$ — другой процесс с последовательность моментов переключения $\{\hat{t}_i\}$.

$$\lim_{r\to+\infty} \hat{x}(\hat{t}_{rs+i_*+j}) = x(t_j) \quad \forall j = 1, 2, \dots, s, \qquad \text{где } i_* \text{ — фазовый сдвиг.}$$

Так как правая часть равенства ограничена по j, левая часть ограничена по r, j. Следовательно $\sup_{i=1,2,\dots} |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty$, где $|x| := \sum_\sigma |x_\sigma|$. Остается заметить, что $x_\sigma(t)$ линейно по $t \in [\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ и поэтому

$$\hat{x}_\sigma(t) \le \max\left\{\hat{x}_\sigma(\hat{t}_{i-1}), \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i)\right\} \le \sup_i \hat{x}_\sigma(\hat{t}_i) \le \sup_i |\hat{x}(\hat{t}_i)| < \infty; \sup_t w(t) = \sup_t \sum_\sigma \hat{x}_\sigma(t) < \infty$$

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda, \quad \text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p - \lambda_{\sigma_p}}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda, \quad \text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Пояснение

$\mu_\sigma > \lambda_\sigma$, так как $\gamma := \sum \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$;

Доказательство Теоремы

Определение

Динамический оператор p-ой сессии — оператор $T_p : x \mapsto x^+$, где x — непрерывное состояние в начале p-ой сессии, а x^+ — в ее конце.

Лемма

Для любого $p \mod M$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами справедливо равенство

$$T_p(x) = A_p x + \tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda, \quad \text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Пояснение

$\mu_\sigma > \lambda_\sigma$, так как $\gamma := \sum \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$; $\mu_\sigma - \lambda_\sigma$ — скорость убывания содержимого обслуживаемого буфера

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$.

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Наблюдение

По оператору T вектор $b = b_T := T(0)$ и матрица $Ax = A_T x := T[x] - b_T$ находятся однозначно и называются вектором сдвига и ядром этого оператора.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

$K_+ := \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \; \forall i\}$ — конус, состоящий из всех векторов с неотрицательными компонентами.

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

$$T_p(x) = A_p x + \underbrace{\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda}_{b}, \quad \text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1\zeta_{\sigma_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \lambda_2\zeta_{\sigma_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \lambda_3\zeta_{\sigma_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{\sigma_p-1}\zeta_{\sigma_p} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{\sigma_p+1}\zeta_{\sigma_p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{\sigma_p+2}\zeta_{\sigma_p} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \zeta_{\sigma_p} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n\zeta_{\sigma_p} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \zeta_\sigma := \frac{1}{\mu_\sigma - \lambda_\sigma}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

$$T_p(x) = A_p x + \underbrace{\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} \lambda}_{b}, \quad \text{где} \quad \lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

и $A_p x = y = (y_i)$,

$$y_j := \left\{ \begin{array}{ll} x_j + \lambda_j \frac{x_{\sigma_p}}{\mu_{\sigma_p} - \lambda_{\sigma_p}} & \text{если } j \neq \sigma_p \\ 0 & \text{в противном случае} \end{array} \right\}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$T[x] = T_2[T_1(x)]$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2} = A_{T_2} \left\{ A_{T_1} x + b_{T_1} \right\} + b_{T_2}$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Доказательство

$$T[x] = T_2[T_1(x)] = A_{T_2} T_1(x) + b_{T_2} = A_{T_2} \left\{ A_{T_1} x + b_{T_1} \right\} + b_{T_2}$$
$$= A_{T_2} A_{T_1} x + \left(A_{T_2} b_{T_1} + b_{T_2} \right)$$

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Композиция произвольного конечного числа монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор, ядро которого получается композицией ядер исходных операторов

Доказательство Теоремы: Следствия Леммы

Определение

Оператор $T : K_+ \to K_+$ называется аффинным, если он представим в виде $T[x] = Ax + b$, где A — $n \times n$-матрица и $b \in \mathbb{R}^n$. Он называется монотонным аффинным, если к тому же все компоненты матрицы A неотрицательны.

Следствие

Динамический оператор любой сессии является монотонным аффинным оператором.Его ядро — динамический оператор при нулевом времени переключения $\tau_{\sigma_p \to \sigma_{p+1}} = 0$

Лемма

Композиция $T = T_2 \circ T_1$ двух монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор с ядром $A_T = A_{T_2} \circ A_{T_1}$.

Композиция произвольного конечного числа монотонных аффинных операторов — монотонный аффинный оператор, ядро которого получается композицией ядер исходных операторов

Оператор монодромии $T = T_{M-1} \circ T_{M-2} \circ \cdots \circ T_1 \circ T_0$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$x(t_{2Mr})$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2\oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p}\oplus M\ominus 1} \circ T_{\overline{p}\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})]$$
$$= \cdots = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})]$$
$$= T^2[x(t_{2M(r-2)})]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$
\begin{aligned}
x(t_{2Mr}) = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})] \\
= \cdots = T_{\overline{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\overline{p} \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{\overline{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})] \\
= T^2[x(t_{2M(r-2)})] = T^3[x(t_{2M(r-3)})]
\end{aligned}
$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \dots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие

$$
\begin{aligned}
x(t_{2Mr}) = T_{\bar{p} \oplus M \ominus 1 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-2+2M(r-1)})] = T_{\bar{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\bar{p} \oplus M \ominus 2 \oplus M(r-1)}[x(t_{2M-4+2M(r-1)})] \\
= \dots = T_{\bar{p} \oplus M \ominus 1} \circ T_{\bar{p} \oplus M \ominus 2} \circ \dots \circ T_{\bar{p}}[x(t_{2M(r-1)})] = T[x(t_{2M(r-1)})] \\
= T^2[x(t_{2M(r-2)})] = T^3[x(t_{2M(r-3)})] = \dots = T^r[x(t_0)]
\end{aligned}
$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\left.\begin{array}{l} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array}\right|$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\left| \begin{array}{l} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_*(t_{2M} + t) = x_*(t_0 + t) \\ q_*(t_{2M} + t) = q_*(t_0 + t) \end{array} \right|$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$

$$\left.\begin{array}{l} x_*(t_{2M}) = x_*(t_0) \\ q_*(t_{2M}) = q_*(t_0) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_*(t_{2M}+t) = x_*(t_0+t) \\ q_*(t_{2M}+t) = q_*(t_0+t) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_*(t) = x_*(t + \underbrace{t_{2M} - t_0}_{\tau}) \\ q_*(t) = q_*(t+\tau) \end{array}\right.$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\overline{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\overline{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

$$x(t_{2Mr+4}) = T_{\overline{p}\oplus 1}[x(t_{2MR+2})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}\oplus 1}[x_*(t_2)] = x(t_4);$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \dots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr}) = y_r \xrightarrow{r\to\infty} y_* = x_*(t_0) \Rightarrow x(t_{2Mr+2}) = T_{\overline{p}}[x(t_{2MR})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}}[x_*(t_0)] = x(t_2)$$

$$x(t_{2Mr+4}) = T_{\overline{p}\oplus 1}[x(t_{2MR+2})] \xrightarrow{r\to\infty} T_{\overline{p}\oplus 1}[x_*(t_2)] = x(t_4); x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s), s = 0, 2, 4, \dots, 2(M-1$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\bar{p}\oplus \frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\bar{p}\oplus\frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\bar{p}\oplus\frac{s}{2}}} x_*(t_s)$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\overline{p}\oplus\frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\overline{p}\oplus\frac{s}{2}}} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 2, 4, \ldots, 2(M-1)$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\overline{p}\oplus \frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\overline{p}\oplus \frac{s}{2}}} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s)$ $\quad s = 0, 1, 2, \ldots, 2M - 1$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\bar{p}\oplus \frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\bar{p}\oplus \frac{s}{2}}} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому

$$x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_s) \qquad s = 0, 1, 2, \ldots, 2M-1$$

$$x(t_{2Mr+s+1}) = A_{T_{\bar{p}\oplus \frac{s}{2}}} x(t_{2Mr+s}) \xrightarrow{r\to\infty} A_{T_{\bar{p}\oplus \frac{s}{2}}} x_*(t_s) = x_*(t_{s+1})$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r \to \infty} x_*(t_j)$.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \dots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r \to \infty} x_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)$ $j = 0, \dots, s-1$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $x^*(t^*_{i^*+j}) = x^*(t^*_{rs+i^*+j}) \xrightarrow{r\to\infty} x_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)\ \forall j \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. Так как второй из них сходится к первому, имеем $q^*(t^*_{i^*+j}) = q^*(t^*_{rs+i^*+j}) = q_*(t_j)$. $x^*(t^*_{i^*+j}) = x_*(t_j)\ \forall j \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$
$\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + t)\ \forall t \geq 0$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$
$\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + kT_* + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + kT_* + t)\ \forall t \geq 0$, где T_* — период и $t_0 + kT_* \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Тогда $s := s_* \cdot s^*$ — общий порядок обоих периодических процессов. $q^*(t^*_{i*}) = q_*(t_0), x^*(t^*_{i*}) = x_*(t_0)$
$\Rightarrow q^*(t^*_{i*} + t) = q_*(t_0 + kT_* + t), x^*(t^*_{i*} + t) = x_*(t_0 + kT_* + t)\ \forall t \geq 0$, где T_* — период и $t_0 + kT_* \geq t^*_{i*}$ Подстановка
$\theta := t + t^*_{i*} \Rightarrow q^*(\theta) = q_*(\underbrace{t_0 + kT_* - t^*_{i*}}_{\tau} + \theta), x^*(\theta) = x_*(t_0 + kT_* - t^*_{i*} + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus\frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого
$q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p}\oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t_{i*}^*$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t_{i*}^*$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$.

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{i*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{i*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{i*}$ и поэтому
$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \bar{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\bar{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta)\ \forall \theta \geq t^*_{j*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{j*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{j*}$ и поэтому
$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Лемма

Пусть $[x(\cdot), q(\cdot)]$ — процесс, порожденный рассматриваемой циклической политикой и начинающийся с сессии $p_0 = \overline{p}$, и $\{t_i\}$ — отвечающая ему последовательность моментов переключения. Тогда $x(t_{i+2}) = T_{\overline{p} \oplus \frac{i}{2}}[x(t_i)]$ для любого четного i.

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)] \Leftrightarrow y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, 2, \ldots,$ где $y_r := x(t_{2rM})$

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$ Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения указанного ранее разностного уравнения, то любой процесс сходится с рассматриваемому периодическому В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига)

Пусть $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$ — периодический процесс порядка s^*. Итого $q^*(\theta) = q_*(\tau + \theta), x^*(\theta) = x_*(\tau + \theta) \; \forall \theta \geq t^*_{i*}$ Выберем натуральное k^* так, что $k^* T^* \geq t^*_{i*}$, где T^* — период процесса $[x^*(\cdot), q^*(\cdot)]$. Для любого $t \geq 0$ имеем $\theta := t + k^* T^* \geq t^*_{i*}$ и поэтому

$x^*(t) = x^*(t + k^* T^*) = x_*(t + \tau + k^* T^*), q^*(t) = q^*(t + k^* T^*) = q_*(t + \tau + k^* T^*)$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$. Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots,$ то любой процесс сходится к рассматриваемому периодическому процессу. В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига).

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Наблюдение

Если $T[y_*] = y_*$ для некоторого вектора $y_* \in K_+$, то процесс $[x_*(\cdot), q_*(\cdot)]$, начинающийся в состоянии y_*, — периодический порядка $s_* = 2M$. Если $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$ для любого неотрицательного решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$, то любой процесс сходится к рассматриваемому периодическому процессу. В этом случае периодический процесс единственен (с точностью до сдвига).

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r]$, $r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\left[\underbrace{|A_T x|}\right]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\leq A_T |x|} \Big]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\le A_T|x|}\Big] \le V[A_T|x|]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\leq A_T |x|}\Big] \leq V[A_T |x|] \leq \rho V[|x|]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Действительно, если это доказано, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ обозначая $|x| := \{|x_i|\}$ имеем

$$V[A_T x] = V\Big[\underbrace{|A_T x|}_{\le A_T |x|}\Big] \le V[A_T |x|] \le \rho V[|x|] = \rho V[x]$$

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p \oplus M \ominus 1} \circ T_{p \oplus M \ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p \oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i \to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$.

Доказательство Теоремы

Оператор монодромии $T = T_{p\oplus M\ominus 1} \circ T_{p\oplus M\ominus 2} \circ \cdots \circ T_{p\oplus 1} \circ T_p$ (композиция по всем M сессиям, составляющим полный цикл обслуживания) — монотонный аффинный оператор. Его ядро равно оператору монодромии, отвечающему мгновенным переключениям $\tau_{i\to j} = 0$. (Здесь и далее $\oplus$ и $\ominus$ — сложение и вычитание по $\mod M$)

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i\to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{V[x(t)]}{dt} \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)} \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{V[x(t)]}{dt} \begin{cases} \geq \gamma - 1 & \text{если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)} \\ = \gamma & \text{если } q(t) = \ominus \end{cases}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} \geq \gamma - 1 \text{ если } q(t) \neq \ominus \text{ и } = \text{ если } u_{q(t)} = \mu_{q(t)}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$V[A_T x]$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x]$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i\to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})]$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i\to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V(T[x]) = V(T[x(t_0)]) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i\to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V\left(T[x]\right) = V\left(T[x(t_0)]\right) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$
$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\tau_{i\to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V(T[x]) = V(T[x(t_0)]) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$
$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0)$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V(T[x]) = V(T[x(t_0)]) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$

$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0) < V[x] \text{ если } x \neq 0, x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. $\quad \tau_{i \to j} = 0 \Rightarrow A_T x = T[x]$.

$$V[A_T x] = V(T[x]) = V(T[x(t_0)]) = V[x(t_{2M})] = V[x(t_0)] + \int_{t_0}^{t_{2M}} \frac{dV[x(t)]}{dt}\, dt$$
$$= V[x] - (1-\gamma)(t_{2M} - t_0) < V[x] \text{ если } x \neq 0, x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$V[A_T x] < V[x]$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0,1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \neq 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \neq 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow V[A_T x] \le \rho V[x] \; \forall x \in K_+, x \neq 0$$

Доказательство Теоремы

Следствие (Смысл оператора монодромии)

$x(t_{2Mr}) = T^r[x(t_0)]$, в частности, $x(t_{2M}) = T[x(t_0)]$

Лемма

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \gamma - 1, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\lambda_\sigma}{\mu_\sigma} < 1$$

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство

Достаточно доказать для $x \in K_+$. Для $x \neq 0, x \in K_+$

$$V[A_T x] < V[x] \Rightarrow \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow \rho := \max_{x \neq 0, x \in K_+} \frac{V[A_T x]}{V[x]} < 1 \Rightarrow V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in K_+$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \le \rho V[x]$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x] \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

Лемма (Ляпуновское свойство ядра оператора монодромии)

Функция $V[x] := \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ является функцией Ляпунова ядра оператора монодромии: $V[A_T x] \leq \rho V[x]\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho \in (0, 1)$.

Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\|\ \forall x$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \; \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \; \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x : \|x\| = 1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \ \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \ \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \ \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \ \le \|A_T^r\| \, \|y_0\|$$

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x : \|x\| = 1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\left\|A_T^r y_0\right\| \leq \left\|A_T^r\right\| \left\|y_0\right\| \leq \left\|A_T\right\|^r \left\|y_0\right\| \leq \rho^r \left\|y_0\right\| \xrightarrow{r \to \infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \left\|b_T\right\|$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится}$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1}|x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho\|x\| \ \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \ \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^\theta b_T\right\| \leq \rho^\theta \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x : \|x\| = 1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \leq \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится } \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \le \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится} \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами. Примем $V[x] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}|x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \le \rho\|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x:\|x\|=1} \|A_T x\| \le \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \ge 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \le \|A_T^r\| \, \|y_0\| \le \|A_T\|^r \, \|y_0\| \le \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^{\theta} b_T\right\| \le \rho^{\theta} \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T \text{ сходится } \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{\theta} b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.
Примем $V[x] = \sum_{i=1}^n \mu_i^{-1} |x_i|$ за норму в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\|x\| := V[x]$.

$$\|A_T x\| \leq \rho \|x\| \; \forall x \Rightarrow \|A_T\| := \max_{x: \|x\|=1} \|A_T x\| \leq \rho < 1$$

Рассмотрим неотрицательное решение уравнений $y_{r+1} = T[y_r] \; \forall r \geq 0$

$$y_{r+1} = A_T y_r + b_T \Rightarrow y_r = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^{r-1-\theta} b_T = A_T^r y_0 + \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_*$$

$$\|A_T^r y_0\| \leq \|A_T^r\| \, \|y_0\| \leq \|A_T\|^r \, \|y_0\| \leq \rho^r \, \|y_0\| \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

$$\left\|A_T^\theta b_T\right\| \leq \rho^\theta \|b_T\| \Rightarrow \text{ ряд } \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T \text{ сходится } \Rightarrow \sum_{\theta=0}^{r-1} A_T^\theta b_T \xrightarrow{r\to\infty} y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^\theta b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*]$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*]$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$T[y_*] = A_T y_* + b_T$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\xlongequal{\theta+1=t} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \dots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$

Доказательство Теоремы

Следствие

Для обоснования Теоремы достаточно показать, что

- Существует неподвижная точка $T[y_*] = y_* \in K_+$ оператора монодромии;
- Все неотрицательные решения разностного уравнения $y_{r+1} = T[y_r], r = 0, 1, \ldots$ стремятся к этой точке $y_r \to y_*$ при $r \to \infty$.

$T[x] = A_T x + b_T$, где ядро A_T — матрица с неотрицательными компонентами.

$$y_* := \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T$$

$$T[y_*] = A_T y_* + b_T = A_T \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta} b_T + b_T = \sum_{\theta=0}^{\infty} A_T^{\theta+1} b_T + b_T$$

$$\overset{\theta+1=t}{=\!=\!=} \sum_{t=1}^{\infty} A_T^{t} b_T + b_T = \sum_{t=0}^{\infty} A_T^{t} b_T = y_*$$